STATICS　　UNIT – I　　(1)

நிலையியல்

பொருள்களின் மீது செயல்படும் விசைகளை பற்றிய அறிவியல் இயந்திரவியல் எனப்படும். (Mechanics) விசைகளின் விளைவாக பொருள்கள் இயக்கத்திலோ அல்லது ஓய்வு நிலையிலோ இருக்கலாம். இயந்திரவியலின் ஒரு பகுதியானது நிலையியலாகும். இது பொருள்களின் மீது விசைகள் செயல்படும் ஓய்வு நிலையில் இருப்பது பற்றிய அறிவதாகும். பொருள்களின் மீது விசைகள் நிலையில் செயல்பட அது இயக்கத்தில் இருந்தால் அவை பற்றி அறிவது இயக்கவியலாகும்.

விசை (Force):-

ஒரே நேர்க்கோட்டில் சீரான இயக்கத்தில் இயங்கும்படிச் செய்வதோ அல்லது ஓய்வு நிலையிலுள்ள பொருளில் ஒரு சிறு மாறுதலை ஏற்படுத்துவதோ விசை (Force) எனப்படும்.

ஒரு விசையினை முழுமையாக அறிவதற்கு

(i) அதன் அளவு

(ii) திசை

(iii) செயல்படும் புள்ளி

ஆகியவை தேவைப்படும். நேர்க்கோட்டிற்கு அளவும் திசையும் இருந்தால் ஒரு விசையினை நேர்க்கோட்டில்

இருக்கலாம். இதனை வெக்டர் என அழைப்பது வழக்கம்.

படத்தில் AB-ன் விசை A-யிலிருந்து B-யை நோக்கி செல்கிறது. A-என்பது செயல்படும் புள்ளி இவ்விசையை $\vec{AB}$ என அழைப்பது வழக்கம்.

விசைகளின் வகைகள் :-

கவர்ச்சி விசை :- (Attraction force)

இரு பொருட்கள் ஒன்றையொன்று நெருங்கும் போது அவற்றில் செயல்படும் விசை கவர்ச்சி விசை ஆகும்.

விலக்கு விசை :- (Repulsion force)

இரு பொருட்கள் ஒன்றையொன்று விலகிச் சென்றால் அவற்றிற்கிடையே செயல்படும் விசை விலக்கு விசையாகும்.

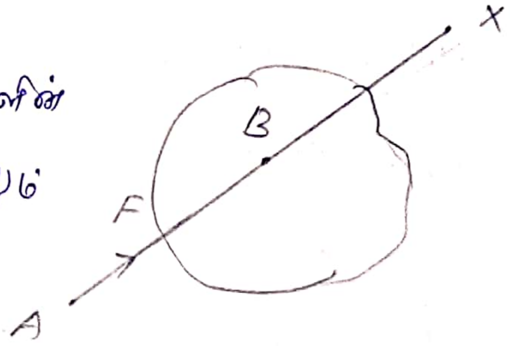
இழுவிசை (Tension force) :-

ஒரு பொருளை தள்ளும் போதோ அல்லது இழுக்கும் போதோ தோன்றும் விசை இழுவிசையாகும்.

சமநிலை (Equilibrium) :-

ஒரு பொருளின் மீது பல விசைகள் செயல்படும் பொருள் ஓய்வு நிலையில் இருந்தால் விசைகள் சமநிலையில் உள்ளது என்போம்.

விசை கடத்தும் பண்பு :-



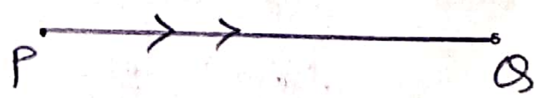
ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது எந்தவொரு புள்ளியின் மீதும் செயல்படும் ஒரு விசையை அதே நேர்க்கோட்டில் மற்றொரு புள்ளிக்கு இடமாற்றம் செய்யலாம். படத்தில் AX எனும் கோட்டில் புள்ளி A-யில் F என்ற விசை செயல்படுகிறது. இவ்விசை செயல்படும் புள்ளியை இடமாற்றம் செய்ய வேண்டும்.

AX-யில் புள்ளி A-யில் AB வழியாகவும் BA வழியாகவும் விசைகள் F, F யை செயல்படுத்துவோம்.

இப்போது A-யில் AB வழியாகவும் செயல்படும் விசை F மற்றும் B-யில் BA வழியாகவும் செயல்படும் விசை F ஒன்றையொன்று சமன் செய்யும்.

இப்போது B-யில் BX வழியே செயல்படும் விசை F மட்டுமே உள்ளது. இதுவே விசை கடத்தும் பண்பு எனப்படும்.

ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் விசைகள் :-



ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விசைகள் $F_1, F_2, F_3, \ldots$ என்பவை ஏற்படுத்தும் விளைவை அதே பொருளின் மீது

R என்ற ஒரு விசையை அதே விளைவினை ஏற்படுத்தினால் R என்பது விசைகள் $F_1, F_2, F_3, \ldots$ ஆகியவற்றின் விளைவு விசைகள் எனப்படும்.

இவ்விளைவு விசையை பொறுத்து F_1, F_2, F_3 என்பவை அதன் கூறுகள் எனப்படும். ஒரே திசையில் செயல்படும் இரு விசைகள் P மற்றும் Q இவற்றின் விளைவு விசை $R = P+Q$ ஆகும்.

P, Q என்ற விசைகள் எதிரெதிர் திசையில் செயல்பட்டால் அவற்றின் விளைவு விசை $R = P-Q$ (அ) $R = P \sim Q$

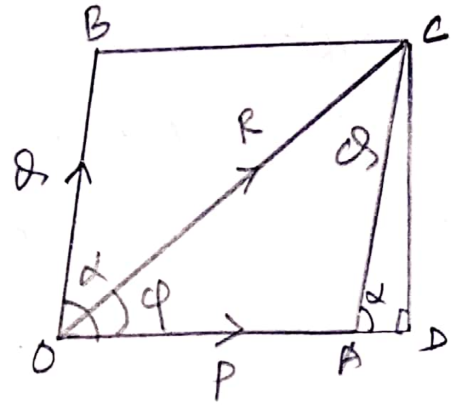
Theorem:-

விசைகளுக்கான இணைகர விதி :-

Statement:-

ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் இரு விசைகளை அளவிலும் திசையிலும் அதே புள்ளி வழியாக வரையப்படும் இணைகரத்தின் இரு அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக கொண்டால் அவற்றின் விளைவு விசை அளவிலும் திசையிலும் அதே புள்ளி வழியாக செல்லும் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்களாக குறிக்கப்படும்.

Proof:-



விசைகள் P மற்றும் Q ஒரு புள்ளி O இல் OA மற்றும் OB ஆகிய திசைகளில் செயல்படுகிறது. இவ்விசைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\angle AOB = \alpha$, இணைகரம் OABC-ல் பூர்த்தி செய்க. தற்போது இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் OC என்பது அதன் விளைவு விசையின் அளவு R எனவும் அது விசை P-உடன் φ கோணம் சாய்வில் உள்ளது எனவும் கொள்க.

$\angle ADC = \varphi$. $CD \perp OA$ வரைக. தற்போது $AC = OB = Q$

Case (i):-

Δ CAD-ல்

$$\sin\alpha = \frac{CD}{AC}$$

$$= \frac{CD}{Q}$$

$$\Rightarrow CD = Q\sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{AD}{AC}$$

$$= \frac{AD}{Q}$$

$$\Rightarrow AD = Q\cos\alpha$$

$$\therefore OD = OA + AD$$

$OD = P + Q\cos\alpha$

Case (ii) :-

Δ OCD-ல்

$$OC^2 = OD^2 + CD^2$$

$$= (P + Q\cos\alpha)^2 + (Q\sin\alpha)^2$$

$$= P^2 + Q^2\cos^2\alpha + 2PQ\cos\alpha + Q^2\sin^2\alpha$$

$$OC^2 = P^2 + Q^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 2PQ\cos\alpha$$

Case (iii) :-

இணைவு விசை R பெருமம் எனில் R^2-ம் பெருமமாகும்.

$$\cos\alpha = 1, \quad \alpha = \cos^{-1}(1)$$

$$\alpha = 0$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ$$

$$R^2 = (P+Q)^2$$

$$\therefore R = P + Q$$

Case (iv) :-

இணைவு விசை R சிறுமம் எனில் R^2-ம் சிறுமமாகும்.

$$\cos\alpha = -1, \quad \alpha = \cos^{-1}(-1)$$

$$\therefore \alpha = 180^\circ$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ$$

$$R^2 = (P-Q)^2 \qquad \therefore R = P - Q.$$

(2) இரு விசைகள் P, Q இவற்றின் விளைவு விசை R_1 ஆகவும் ஒரு விசையை எதிர் திசையில் செயல்படுத்தினால் அவற்றின் விளைவு விசை R_2 எனில்

$R_1^2 + R_2^2 = 2(P^2+Q^2)$ என நிறுவுக.

Proof:-

விளைவு விசை $R_1^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$

இதிலிருந்து

$$R_1^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha \longrightarrow (1)$$

(1)-ல் $Q = -Q$

$$\Rightarrow R_2^2 = P^2+Q^2-2PQ\cos\alpha \longrightarrow (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow R_1^2+R_2^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha + P^2+Q^2-2PQ\cos\alpha$$

$$= 2P^2+2Q^2$$

$R_1^2+R_2^2 = 2(P^2+Q^2)$ என நிறுவப்பட்டது.

(3) ஒரு துகளில் செயல்படும் இருசம விசைகளின் விளைவு விசைகளின் வர்க்கம் விசையின் பெருக்கற்பலனின் மூன்று மடங்கு எனில் அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

Solution:-

கொடுக்கப்பட்ட இருசம விசைகள் P, P என்க.

விளைவு விசை கோணம் α என்க.

கணக்கின்படி, விளைவு விசையின் வர்க்கம்

விசையின் மூன்று மடங்கு எனில்

$$R^2 = 3P^2$$

$$P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha = 3P^2$$

$$2P^2 + 2P^2\cos\alpha = 3P^2$$

$$2P^2\cos\alpha = 3P^2 - 2P^2$$

$$2P^2\cos\alpha = P^2$$

$$\cos\alpha = \frac{P^2}{2P^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \text{ (or)}$$

$$\therefore \alpha = 60^\circ \text{ (or) } \alpha = \frac{\pi}{3}$$

(4) α கோண அளவில் ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் இரு விசைகளின் விளைவு விசை $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$ ஆகும். விசைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{2}-\alpha$ எனில் விளைவு விசை $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$ ஆகும் எனில் $\tan\alpha = \frac{m-1}{m+1}$ என நிரூபிக்க.

Proof:-

α கோண அளவில் ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் இரு விசைகளின் விளைவு விசை $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$ ஆகும்.

$$R = (2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$$

$$\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha} = (2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$$P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha = (2m+1)^2(P^2+Q^2)$$

$$P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha = (4m^2+4m+1)(P^2+Q^2)$$

$$P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha = (4m^2+4m)\,P^2+Q^2+P^2+Q^2$$

$$2PQ\cos\alpha = (4m^2+4m)(P^2+Q^2)$$

$$2PQ\cos\alpha = 4m(m+1)(P^2+Q^2)$$

$$PQ\cos\alpha = 2m(m+1)(P^2+Q^2) \longrightarrow (1)$$

இவைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{2}-\alpha$ எனும் போது

$$R = (2m-1)\,P^2+Q^2 \qquad \because \cos(90-\theta) = \sin\theta$$

$$\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = (2m-1)(P^2+Q^2)$$

$$\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\sin\alpha} = (2m-1)(P^2+Q^2)$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$$P^2+Q^2+2PQ\sin\alpha = (2m-1)^2(P^2+Q^2)$$

$$P^2+Q^2+2PQ\sin\alpha = (4m^2-4m+1)(P^2+Q^2)$$

$$P^2+Q^2+2PQ\sin\alpha = (4m^2-4m)(P^2+Q^2)+(P^2+Q^2)$$

$$2PQ\sin\alpha = (4m^2-4m)(P^2+Q^2)$$

$$2PQ\sin\alpha = 4m(m-1)(P^2+Q^2)$$

$$PQ\sin\alpha = 2m(m-1)\,P^2+Q^2 \longrightarrow (2)$$

Scanned with CamScanner

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow$$

$\tan\alpha = \frac{m-1}{m+1}$ என நிறுவப்பட்டது.

(5) சமமான அளவுகள் உடைய இரு விசைகளின் பெரும விளைவு விசை R எனவும் சிறும விளைவு விசை S எனவும் உள்ளது. விசைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 2φ எனில் அவற்றின் விளைவு விசையின் அளவு

$$R_1 = \sqrt{R^2\cos^2\varphi + S^2\sin^2\varphi}$$ என நிறுவுக.

Proof:-

விசைகளை P, Q என்க. பெரும

விளைவு விசை $R = P+Q. \rightarrow (1)$

சிறும விளைவு விசை $S = P-Q \rightarrow (2)$

$$(1)+(2) \Rightarrow R+S = 2P$$

$$\Rightarrow P = \frac{R+S}{2}$$

|||ly $$Q = \frac{R-S}{2}$$

இவற்றிலிருந்து கிடைக்கக் கூடிய புதிய விளைவு விசையை R_1 என்போம்.

எனவே, $$R_1 = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$$

$$R_1 = \sqrt{\left(\frac{R+S}{2}\right)^2 + \left(\frac{R-S}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{R+S}{2}\right)\left(\frac{R-S}{2}\right)\cos 2\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{R^2+S^2+2RS}{4} + \frac{R^2+S^2-2RS}{4} + \left(\frac{R^2-S^2}{2}\right)\cos 2\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{R^2+S^2+2RS+R^2+S^2-2RS}{4} + \left(\frac{R^2-S^2}{2}\right)\cos 2\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{2(R^2+S^2)}{4} + \left(\frac{R^2-S^2}{2}\right)\cos 2\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{R^2+S^2}{2} + \left(\frac{R^2-S^2}{2}\right)\cos 2\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(R^2+S^2) + \frac{1}{2}(R^2-S^2)\cos 2\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}R^2(1+\cos 2\varphi) + \frac{S^2}{2}(1-\cos 2\varphi)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}R^2(2\cos^2\varphi) + \frac{S^2}{2}(2\sin^2\varphi)}$$

$\therefore R_1 = \sqrt{R^2\cos^2\varphi + S^2\sin^2\varphi}$ என நிறுவப்பட்டது.

(5) விசைகள் 3P, 5P இவற்றின் விளைவு விசை 7P எனில்,

(i) விசைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

(ii) விளைவு விசைக்கும் பெரிய விசைக்கும் இடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

Solution:- விசைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் காண்க.

Scanned with CamScanner

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \longrightarrow ①$$

$P = 3P,\ Q = 5P,\ R = 7P$ என ① -ல் பிரதியிட

$$49P^2 = 9P^2 + 25P^2 + 2(3P)(5P)\cos\alpha$$

$$49P^2 = 9P^2 + 25P^2 + 30P^2\cos\alpha$$

$$49P^2 = 34P^2 + 30P^2\cos\alpha$$

$$30P^2\cos\alpha = 49P^2 - 34P^2$$

$$30P^2\cos\alpha = 15P^2$$

$$\cos\alpha = \frac{15P^2}{30P^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \quad (\text{or}) \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

மேலும் $$\tan\varphi = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} \longrightarrow ②$$

$\alpha = \frac{\pi}{3},\ P = 3P,\ Q = 5P$ என ② -ல் பிரதியிட

$$\tan\varphi = \frac{5P\sin 60^\circ}{3P + 5P\cos 60^\circ}$$

$$= \frac{5P \times \sqrt{3}/2}{3P + 5P\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{5\sqrt{3}P}{2}}{P(3 + 5/2)}$$

$$= \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{6+5}{2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{5\sqrt{3}}{11}, \quad \therefore \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{11}\right)$$

7. ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் விசைகள் P, Q - யின் தொகுபயன் விசை R, Q இரட்டிப்பானால் R இரட்டிப்பாகும் Q எதிர்திசையில் இருந்தாலும் R இரட்டிப்பாகும் எனில் $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$ என நிறுவுக.

Proof:-

விசைகள் P, Q இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் α என்க.

எனவே,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \longrightarrow (1)$$

Q இரட்டிப்பானால் R- இரட்டிப்பாகும் என்பதால்

$Q = 2Q$, $R = 2R$ என (1)-ல் பிரதியிட

$$4R^2 = P^2 + 4Q^2 + 4PQ\cos\alpha \longrightarrow (2)$$

Q எதிர்திசையில் செயல்பட்டால் R இரட்டிப்பாகும் என்பதால்

$Q = -Q$, $R = 2R$ என (1)-ல் பிரதியிட

$$4R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha \longrightarrow (3)$$

$(1) + (3) \Rightarrow 5R^2 = 2(P^2 + Q^2)$

$$2P^2 + 2Q^2 - 5R^2 = 0 \longrightarrow (4)$$

$(1) \times 2 \Rightarrow 2R^2 = 2P^2 + 2Q^2 + 4PQ\cos\alpha \longrightarrow (5)$

$(2) - (5) \Rightarrow -P^2 + 2Q^2 + 2R^2 = 0 \longrightarrow (6)$

(4), (6) – லிருந்து குறுக்கு பெருக்கும் முறையை பயன்படுத்த,

$$\frac{P^2}{6} = \frac{Q^2}{9} = \frac{R^2}{6}$$

$$\frac{P^2}{2} = \frac{Q^2}{3} = \frac{R^2}{2}$$

$$\frac{P}{\sqrt{2}} = \frac{Q}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$\therefore P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$ என நிறுவப்பட்டது.

(8) ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் இரு விசைகள் P, Q இவற்றின் விளைவு விசை P, P இருமடங்காகும் போது அதன் விளைவு விசை $\sqrt{4P^2 - Q^2}$ என நிறுவுக

Proof:-

விளைவு விசை $P^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$$Q^2 + 2PQ\cos\alpha = 0$$

$$Q(Q + 2P\cos\alpha) = 0$$

$$Q + 2P\cos\alpha = 0$$

$$Q = -2P\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{-Q}{2P}$$

P இருமடங்கு ஆகும் போது $P = 2P$ எனவும்

$\cos\alpha = \dfrac{-Q}{2P}$ எனவும் பிரதியிட

$$R^2 = 4P^2 + Q^2 + 2(2P)Q\left(\frac{-Q}{2P}\right)$$

$$R^2 = 4P^2 + Q^2 - 2Q^2$$

$$R^2 = 4P^2 - Q^2$$

$\therefore R = \sqrt{4P^2 - Q^2}$ என நிறுவப்பட்டது.

(9). விசைகள் P, Q -ன் விளைவு விசை x, α கோண அளவில் உள்ள விசைகள் P, R அதே கோண அளவில் செயல்படுகிறது. அவற்றின் விளைவு விசை x மேலும் α கோண அளவில் விசைகள் Q மற்றும் R இவற்றின் விளைவு விசை y எனில் $P = \sqrt{x^2+QR} = \frac{QR(Q+R)}{Q^2+R^2-y^2}$ என நிறுவுக. மேலும் $P+Q+R=0$ எனில் $y = x$ எனவும் நிறுவுக.

Proof:-

கொடுக்கப்பட்ட விசைகள் P, Q -ன் விளைவு விசை x என்பதால்

$$x^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \longrightarrow (1)$$

விசைகள் P, Q இவற்றின் விளைவு விசை x - என்பதால் Q = R என (1)-ல் பிரதியிட

$$x^2 = P^2 + R^2 + 2PR\cos\alpha \longrightarrow (2)$$

Q மற்றும் R -ன் விளைவு விசை y என்பதால் P = Q என (2)-ல் பிரதியிட

$$x^2 = Q^2 + R^2 + 2QR\cos\alpha \longrightarrow (3)$$

$$(1) \Rightarrow x^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$$

(1) $\Rightarrow \quad x^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

(1) - (2) $\Rightarrow$

(2) $\Rightarrow \quad x^2 = P^2 + R^2 + 2PR\cos\alpha$

$(-) \quad (-) \quad (-) \quad (-)$

$$0 = Q^2 - R^2 + 2PQ\cos\alpha - 2PR\cos\alpha$$

$$Q^2 - R^2 + 2P\cos\alpha\,(Q-R) = 0$$

$$(Q+R)(Q-R) + 2P\cos\alpha\,(Q-R) = 0$$

$$(Q-R)\{(Q+R) + 2P\cos\alpha\} = 0$$

$$Q+R+2P\cos\alpha = 0$$

$$Q+R = -2P\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-(Q+R)}{2P} \longrightarrow (4)$$

(4) -ன் மதிப்பை சமன்பாடு (1) -ல் பிரதியிட

(1) $\Rightarrow \quad x^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\left[-\frac{Q+R}{2P}\right]$

$$= P^2 + Q^2 - Q(Q+R)$$

$$= P^2 + Q^2 - Q^2 - QR$$

$$x^2 = P^2 - QR$$

$$P^2 = QR + x^2$$

$$P = \sqrt{QR + x^2} \longrightarrow (5)$$

(4) -ன் மதிப்பை (3) -ல் பிரதியிட

$$y^2 = Q^2 + R^2 + 2QR\left[-\frac{Q+R}{2P}\right]$$

$$= Q^2 + R^2 + QR\left[\left(-\frac{Q+R}{P}\right)\right]$$

$$= Q^2 + R^2 - \frac{Q^2 R}{P} - \frac{Q R^2}{P}$$

$$= Q^2 + R^2 - \frac{QR(Q+R)}{P}$$

$$\frac{QR(Q+R)}{P} = Q^2 + R^2 - y^2$$

$$\Rightarrow P = \frac{QR(Q+R)}{Q^2+R^2-y^2} \longrightarrow (6)$$

சமன்பாடு (5), (6) -லிருந்து,

$$\therefore P = \sqrt{x^2+QR} = \frac{QR(Q+R)}{Q^2+R^2-y^2}$$ என நிறுவப்பட்டது.

மேலும்,

$$P+Q+R=0$$

$Q+R=-P$ இவற்றின் மதிப்பை

சமன்பாடு (4)-ல் பிரதியிட

$$\cos\alpha = \frac{-(-P)}{2P}$$

$$\cos\alpha = \frac{P}{2P}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \longrightarrow (7)$$

(7)-ன் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட

$$x^2 = P^2+Q^2+2PQ\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = P^2+Q^2+PQ \longrightarrow (8)$$

(7)-ன் மதிப்பை (3)-ல் பிரதியிட

$$y^2 = Q^2 + R^2 + 2QR\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y^2 = Q^2 + R^2 + QR \longrightarrow (9)$$

$$(8) - (9) \Rightarrow x^2 - y^2 = P^2 + PQ - R^2 - QR$$

$$= P^2 - R^2 + PQ - QR$$

$$= (P+R)(P-R) + (P-R)Q$$

$$= (P-R)\{P+R+Q\}$$

$$= (P-R)(0)$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

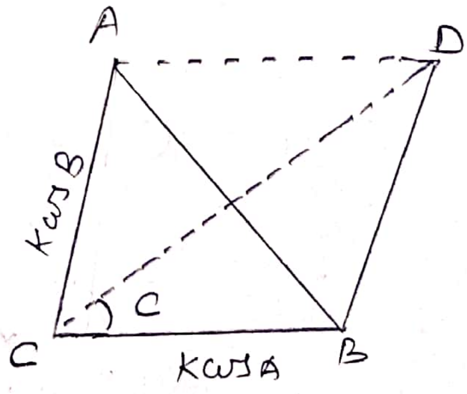
$$x^2 = y^2$$

$\therefore$ $x = y$ என நிறுவப்பட்டது.

(10). ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் விசைகள் $K\cos A$, $K\cos B$ எனவும் C கோண அளவில் செயல்படுகிறது எனில் அவற்றின் விளைவு விசை $K\sin C$ என நிறுவுக.

Proof:-

விளைவு விசை $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \longrightarrow (1)$



சமன்பாடு (1)-ல் $P = K\cos A$

$Q = K\cos B$, $\alpha = C$ எனவும்

பிரதியிட

$$R^2 = K^2\cos^2 A + R^2\cos^2 B + 2K^2\cos A\cos B\cos C$$

$$R^2 = k^2(\cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A \cos B \cos C)$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$$

$$\Rightarrow 2\cos A \cos B \cos C = 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$$

$$\therefore R^2 = \left[k^2 \cdot \cos^2 A + \cos^2 B + 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)\right]$$

$$= k^2(1 - \cos^2 C)$$

$$R^2 = k^2 \sin^2 C$$

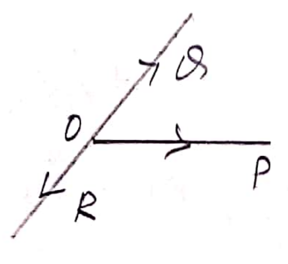
$\therefore R = k\sin C$ என நிறுவப்பட்டது.

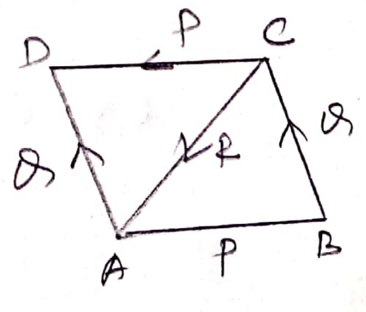
விசைகளின் முக்கோண விதி

Statement:-

ஒரு புள்ளியில் செயல்படுகின்ற மூன்று விசைகள் ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு முக (ஒரே) வரிசையில் எடுக்கப்பட்ட மூன்று பக்கங்களால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படின் அம்மூன்று விசைகளும் சமநிலையில் இருக்கும்.

Proof:-





ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களால்

குறிப்பிடப்படுகின்ற மூன்று விசைகளின் சமநிலைப் பற்றிய விதிகளை கூறுவதால் இது விசையின் முக்கோண விதி எனப்படுகிறது.

O என்ற புள்ளியில் P, Q, R என்ற மூன்று விசைகள் A, B, C எனும் முக்கோணத்தின் வருமுக வரிசையில் எடுக்கப்பட்ட AB, BC, CA எனும் பக்கங்களால் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படுகின்றன.

இங்கு $\overrightarrow{AB} = P$, $\overrightarrow{BC} = Q$, $\overrightarrow{CA} = R$

இப்பொழுது ABCD என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

இங்கு $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = P$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = Q$

விசைகளின் இணைகர விதியின் படி AB, BC ஆகிய பக்கங்களால் குறிப்பிடப்படுகின்ற P, Q ஆகிய விசைகளின் விளைவு விசையானது அளவிலும் திசையிலும் AC என்ற மூலைவிட்டத்தில் குறிக்கப்படும்.

இதிலிருந்து,

$$P + Q = \overrightarrow{AC}, \quad R = \overrightarrow{CA}$$

மற்றும் $$P + Q + R = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$$

$$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}$$

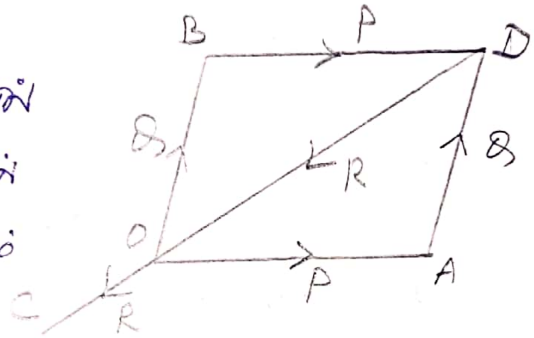
$$\therefore P + Q + R = 0.$$

(12) விசையின் முக்கோண விதியின் மறுதலை உண்மையாகும்.

Statement :-

ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற மூன்று விசைகள் சமநிலையில் இருப்பின் அம்மூன்று விசைகளையும் அவற்றின் செயற்கோடுகளுக்கு இணையாக வரையப்பட்ட பக்கங்களான ஒரு முக்கோணத்தின் வரிசையில் எடுத்த மூன்று பக்கங்கள் அளவிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படும்.

Proof :-



O என்னும் புள்ளியின் OA, OB, OC என்னும் திசைகளில் செயல்படுகின்ற P, Q, R என்னும் விசைகள் சமநிலையில் இருப்பதாகக் கொள்க. எனவே,

$$P+Q+R=0$$

$$P+Q=-R \longrightarrow (1)$$

இப்பொழுது $\vec{OA}=P$, $\vec{OB}=Q$ என்று இருக்குமாறு $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ என்ற நேர்க்கோட்டு துண்டுகளை எடுத்து OADB என்ற இணைகரத்தை பூர்த்தி செய்க.

இணைகர விதியின் படி,

$$P+Q=\vec{OD} \longrightarrow (2)$$

சமன்பாடு (1), (2) லிருந்து,

$$\vec{OD}=-R$$

Scanned with CamScanner

மேலும் $\vec{AD} = \vec{OB} = Q$

ΔOAD – யில்

$\vec{OA} = P$, $\vec{AD} = Q$, $\vec{OD} = R$ என அறிவோம்.

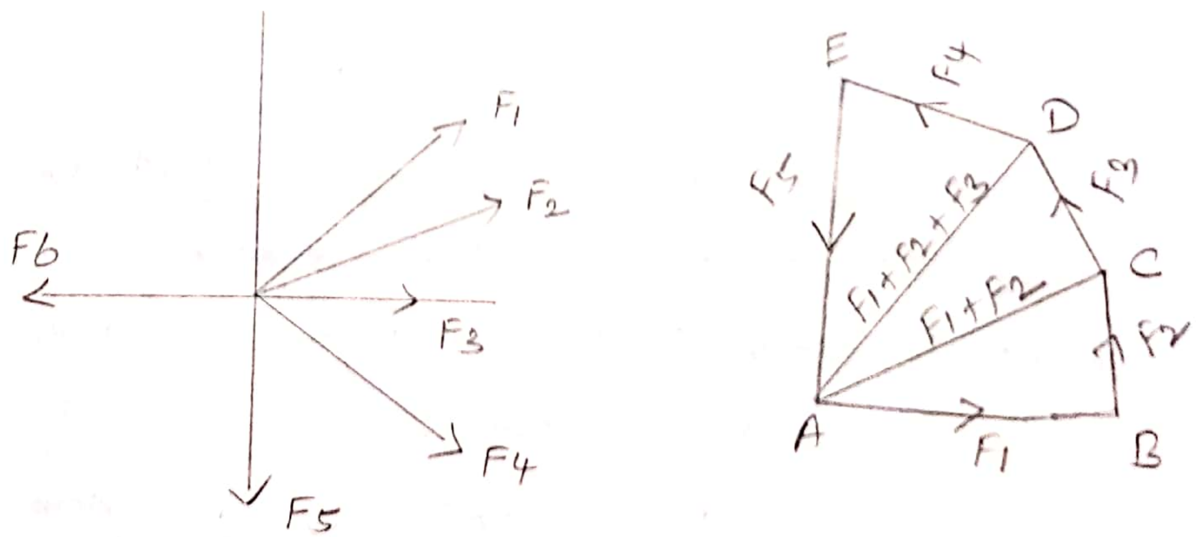
P, Q, R ஆகிய விசைகள் ΔOAD-யின் வரிசைக் கிரமத்தில் எடுக்கப்பட்ட $\vec{OA}$, $\vec{AD}$, $\vec{DO}$ ஆகிய பக்கங்களால் அளவிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படுகின்றன.

(13) விசைகளின் பலகோண விதி

Statement :-

ஒரு புள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற பல்வேறு விசைகள் ஒரு பலகோணத்தின் ஒருமுக வரிசையில் எடுக்கப்பட்ட அதன் பக்கங்கள் அளவிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்படின் அவ்விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்.

Proof :-



O என்னும் புள்ளி வழியே செயல்படுகின்ற F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 என்னும் விசைகள் ABCDE என்னும்

ஒழுங்கு பலகோணத்தின் $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DE}, \vec{EA}$ ஆகிய பக்கங்களால் அளவையும் திசையையும் குறிப்பிடுகின்றன.

இங்கு $\vec{AB} = F_1$, $\vec{BC} = F_2$, $\vec{CD} = F_3$, $\vec{DE} = F_4$, $\vec{EA} = F_5$ என்க.

இவ்விசைகள் சமநிலை பெற வேண்டுமானால் இவற்றின் மொத்த விளைவு 0 (பூஜ்ஜியம்) ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

ΔABC-ல் $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

$= F_1 + F_2$

ΔACD-ல்

$\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}$

$= F_1 + F_2 + F_3$

ΔADE-ல்

$\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE}$

$= F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

அதாவது,

$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = \vec{AE} + \vec{EA}$

$= \vec{AE} - \vec{AE}$

$\therefore F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 0$ என நிறுவப்பட்டது.

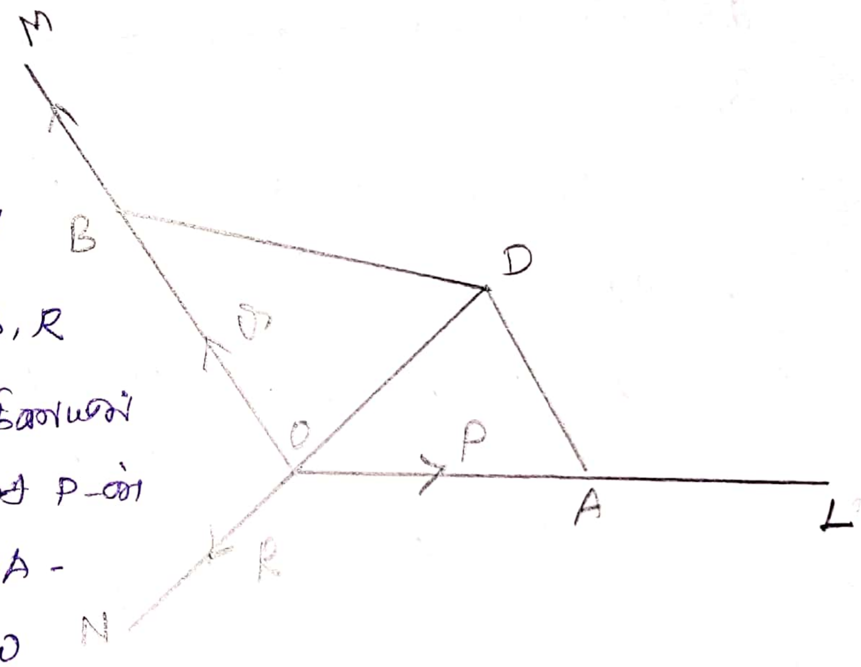
14

லாமியின் தேற்றம் :-

Statement:-

ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் மூன்று விசைகள் சமநிலையில் இருந்தால் விசைகள் ஒவ்வொன்றும் மற்ற இரு விசைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தின் சைன் மதிப்புடன் நேர் விகிதத்தில் இருக்கும்.

Proof:-



புள்ளி O-வில் விசைகள் P, Q, R செயல்பட்டு சமநிலையில் உள்ளது. விசை P-ன் அளவுக்கேற்ப OA என்னும் பகுதியை குறிக்க. விசை Q-ன் அளவுக்கேற்ப OB என்னும் பகுதியை குறிக்க.

இணைகரம் OADB-யை பூர்த்தி செய்க.

Δ OAD-ல்

$$\frac{OA}{\sin O\hat{D}A} = \frac{AD}{\sin A\hat{O}D} = \frac{DO}{\sin D\hat{A}O} \longrightarrow (1)$$

$\angle ODA = \angle BOD$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம்)

$= 180 - \angle MON$

$$\sin \angle ODA = \sin(180 - \angle MON)$$

$$= \sin \angle MON \longrightarrow (2)$$

$$\angle AOD = 180 - \angle NOL$$

$$\sin \angle AOD = \sin(180 - \angle NOL)$$

$$= \sin \angle NOL \longrightarrow (3)$$

$$\angle DAO = 180 - \angle BOL$$

$$= 180 - \angle LOM$$

$$\sin \angle DAO = \sin(180 - \angle LOM)$$

$$= \sin \angle LOM \longrightarrow (4)$$

(2), (3), (4) -ஐ (1)-ல் பிரதியிட

$$\frac{OA}{\sin \angle MON} = \frac{AD}{\sin \angle NOL} = \frac{DO}{\sin \angle LOM}$$

$$\therefore \frac{P}{\sin(Q, R)} = \frac{Q}{\sin(P, R)} = \frac{R}{\sin(P, Q)}$$

என நிறுவப்பட்டது.

15 λ, μ தேற்றம்

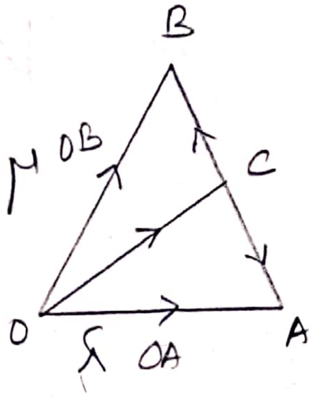
Statement:-

புள்ளி O-வில் OA, OB என்ற கோடுகள் வழியே λOA, μOB என்ற விசைகள் செயல்படுகிறது.

எனில் இவற்றின் விளைவு விசை $(\lambda+\mu)OC$.

இங்கு C என்பது AB-ல் $\lambda AC = \mu CB$ என உள்ள புள்ளியாகும்.

Proof:-



விசைகள் λOA, μOB ஆகியவை நேர்க்கோடுகள் OA, OB வழியே செயல்படுகிறது.

AB-ல் C என்ற புள்ளி $\lambda AC = \mu CB$ உள்ளது.

ΔOAC-ல்

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}$$

$$\lambda(\overrightarrow{OA}) = \lambda OC + \lambda CA \longrightarrow (1)$$

ΔOCB-ல்

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\mu(\overrightarrow{OB}) = \mu OC + \mu CB \longrightarrow (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \lambda OA + \mu OB = (\lambda+\mu) OC + \lambda CA + \mu CB$$

$$= (\lambda+\mu) OC - \lambda AC + \mu CB$$

$$= (\lambda+\mu) OC - \mu CB + \mu CB$$

$\therefore \lambda OA + \mu OB = (\lambda+\mu) OC$ என நிறுவப்பட்டது.

Problems :-

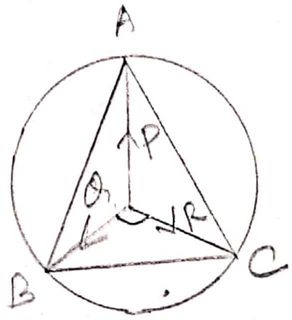
(1) O என்பது ΔABC-ன் சுற்றுவட்ட மையம் OA, OB, OC ஆகியவற்றின் வழியாக செயல்படுகின்ற ~~OA, OB, OC ஆகியவற்றின் வழி~~ P, Q, R என்ற விசைகள் சமநிலையில் இருக்கின்றன. எனில்

$$\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$$ எனநிறுவுக.

Proof :-

P, Q, R என்ற மூன்று விசைகளும் சமநிலையில் இருப்பதால்

லாமியின் தேற்றப்படி,



$$\frac{P}{\sin(Q,R)} = \frac{Q}{\sin(P,R)} = \frac{R}{\sin(P,Q)}$$

$$\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{C}{\sin 2C}$$

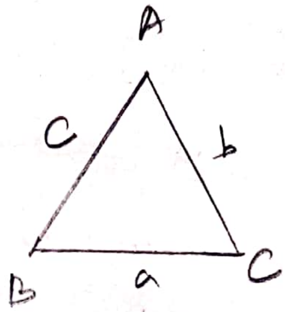
$$\frac{P}{2\sin A\cos A} = \frac{Q}{2\sin B\cos B} = \frac{C}{2\sin C\cos C}$$

R_1 என்பது சுற்றுவட்ட மையம் எனில்

$$\sin A = \frac{a}{2R_1}, \quad \sin B = \frac{b}{2R_1}, \quad \sin C = \frac{c}{2R_1}$$

$$\frac{P}{2\frac{a}{2R_1}\cos A} = \frac{Q}{2\frac{b}{2R_1}\cos B} = \frac{R}{2\frac{c}{2R_1}\cos C}$$

$$\frac{P}{a\cos A} = \frac{Q}{b\cos B} = \frac{C}{c\cos C}$$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Hlly

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{a\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} = \frac{Q}{b\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)} = \frac{R}{c\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{2Pbc}{a(b^2+c^2-a^2)} = \frac{2Qac}{b(a^2+c^2-b^2)} = \frac{2Rab}{c(a^2+b^2-c^2)}$$

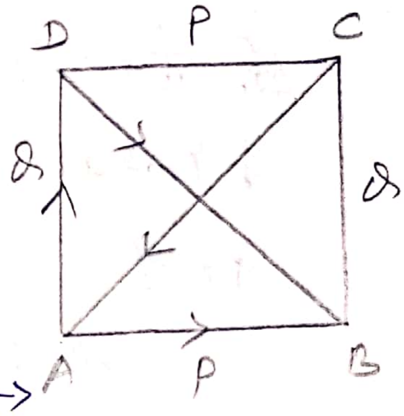
ஒன்ற புறமும் abc ஆல் வகுக்க,

$$\Rightarrow \frac{Pbc}{a^2bc(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Qac}{b^2ac(a^2+c^2-b^2)} = \frac{Rab}{c^2ab(a^2+b^2-c^2)}$$

$$\therefore \frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(a^2+c^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$$

என நிறுவப்பட்டது.

(2) இரு விசைகள் ஒரு புள்ளியின் மீது செயல்படுகின்றன. அவ்விசைகளின் கூடுதலும் வித்தியாசமும் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டினால் அவ்விசைகளின் அளவுகள் சமம் எனக் காட்டுக.



Proof:-

இரண்டு விசைகளை P, Q என்க.

$P = \vec{AB}$, $Q = \vec{DA}$ என்க.

விசைகளின் கூடுதல் $P+Q = \vec{AB} + \vec{BC}$

$= \vec{AC}$

விசைகளின் வித்தியாசம் $P-Q = \vec{AB} - \vec{BC}$

$= \vec{AB} - \vec{AD}$

$= \vec{AB} + \vec{DA}$

$= \vec{DB}$

விசைகளின் கூடுதலும் வித்தியாசமும் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன.

ABCD என்ற இணைகரத்தின் AC, BD என்ற மூலைவிட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

எனவே ABCD என்பது ஒரு சாய்சதுரமாகின்றது.

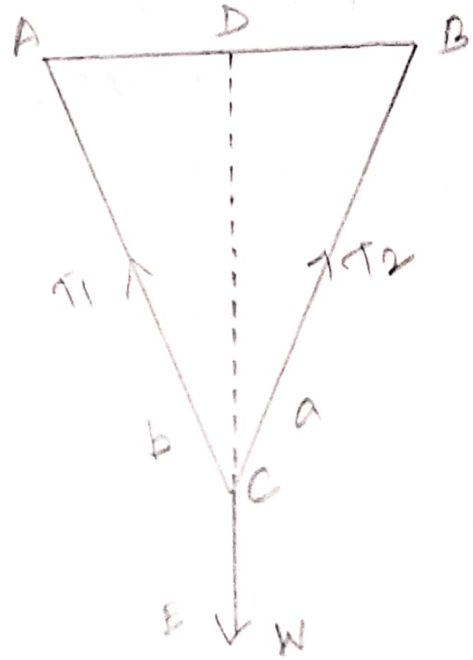
$\vec{AB} = \vec{AD}$

$P = Q$

இதிலிருந்து P, Q என்ற இரு விசைகளின் அளவுகள் சமமாகும்.

(3) A, B என்பன c தூரத்தில் உள்ள இரு நிலைப்புள்ளிகள் AC, BC என்ற இரு கயிறுகள் C-என்ற இடத்தில் ஒரு எடையை தாங்குகிறது. AC, BC இவற்றின் நீளங்கள் முறையே b, a. கயிறுகளின் இழுவிசைகள் $b(a^2+c^2-b^2) : a(b^2+c^2-a^2)$ என நிரூபிக்க.

Proof:-



லாமியின் தேற்றப்படி,

$$\frac{T_1}{\sin \angle BCE} = \frac{T_2}{\sin \angle ACE} \longrightarrow (1)$$

$$\angle BCE = 180 - \angle DCB$$

$$= 180 - (90 - \angle DBC)$$

$$\angle BCE = 90 + \angle DBC$$

$$\sin \angle BCE = \sin(90 + \angle DBC)$$

$$\sin \angle BCE = \cos B \longrightarrow (2)$$

$$\angle ACE = 180 - \angle DCA$$

$$= 180 - (90 - \angle DAC)$$

$$ACE = 90 + \angle DAC$$

$$\sin \angle ACE = \sin(90 + \angle DAC)$$

$$\sin \angle ACE = \cos A \longrightarrow (3)$$

②, ③-ஐ ①-ல் பிரதியிட

$$\frac{T_1}{\cos B} = \frac{T_2}{\cos A}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\cos B}{\cos A} \longrightarrow (4)$$

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

இவற்றின் மதிப்புகளை ④-ல் பிரதியிட

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{b(a^2+c^2-b^2)}{a(b^2+c^2-a^2)}$$

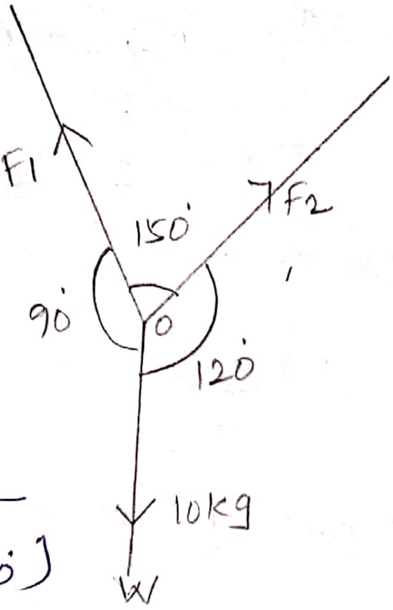
$$\therefore T_1 : T_2 = b(a^2+c^2-b^2) : a(b^2+c^2-a^2)$$

என நிறுவப்பட்டது.

④ O எனும் துகள் F_1, F_2, 10kg எடைகள் ஆகிய அளவுகளுடன் மூன்று விசைகளின் தாக்கத்துக்கு உட்பட்ட சமநிலையில் இருக்கிறது. முதல் இரு விசைகளின் இடைக்கோணம் 150°, கடைசி இரு விசைகளின் இடைக்கோணம் 120° எனில் F_1, F_2 ஆகியவற்றை காண்க.

Solution:-

லாமியின் தேற்றப்படி,



$$\frac{F_1}{\sin 120^\circ} = \frac{F_2}{\sin 90^\circ} = \frac{W}{\sin 150^\circ}$$

$$\frac{F_1}{\sin(180^\circ - 60^\circ)} = \frac{F_2}{1} = \frac{W}{\sin(180^\circ - 30^\circ)}$$

$$\frac{F_1}{\sin 60^\circ} = F_2 = \frac{W}{\sin 30^\circ}$$

$$\frac{F_1}{\sqrt{3}/2} = F_2 = \frac{10}{1/2}$$

$$\frac{F_1}{\sqrt{3}/2} = \frac{10}{1/2}$$

$$F_1 = 10\sqrt{3}$$

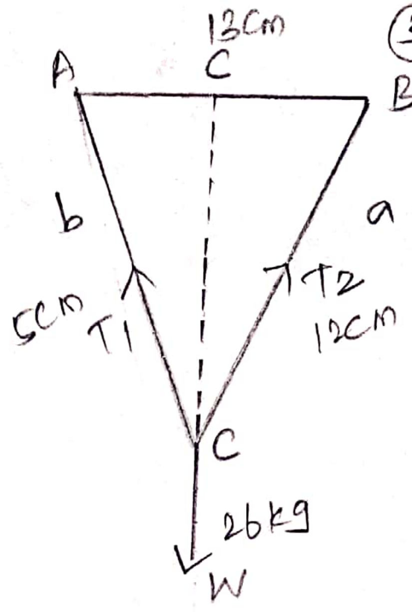
$$\Rightarrow F_2 = 10 \times 2$$

$$\therefore F_2 = 20$$

(5). ஒரு சுவரில் இரு கொக்கிகள் சம அளவில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. AC, BC என்ற இரு கயிறுகள் C-ல் 26kg எடையை தாங்குகிறது. AC = 5cm, BC = 12cm, AB = 13cm எனில் கயிறுகளின் இழுவிசையைக் காண்க.

Solution:-

$$T_1 = W\cos B, \quad T_2 = W\cos A$$



$$\Rightarrow T_1 = W\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)$$

$$= 26\left[\frac{12^2+13^2-5^2}{2\times12\times13}\right]$$

$$= 26\left[\frac{144+169-25}{312}\right]$$

$$T_1 = 26\left[\frac{288}{312}\right]$$

$$\therefore T_1 = 24$$

$$T_2 = W\cos A$$

$$= W\left[\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]$$

$$= 26\left[\frac{5^2+13^2-12^2}{2\times5\times13}\right]$$

$$= 26\left[\frac{25+169-144}{130}\right]$$

$$= 26\left[\frac{25+25}{130}\right]$$

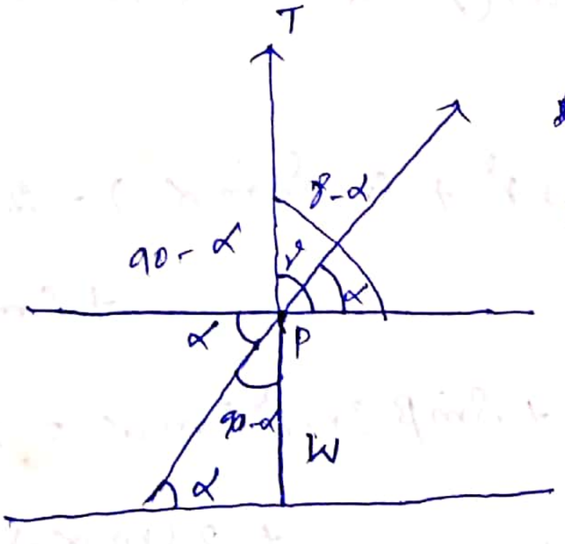
$$= 26\left[\frac{50}{130}\right]$$

$$T_2 = 10$$

29.6.04

① கிடைத்தளத்துடன் α கோண சாய்வில் உள்ள ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின் மேலுள்ள பொருளானது கிடைக்கோட்டுடன் γ கோண சாய்வில் இருக்கும் படி கயிற்றால் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. சாய்வுக் கோணம் β அதிகரிக்கும் போது கயிற்றின் சாய்வுக் கோணம் மாறவில்லை. ஆனால் கயிற்றின் இழுவிசை இருமடங்காகிறது எனில் $\cot\alpha - 2\cot\beta = \tan\gamma$ என நிறுவுக.

Proof :-



பொருளின் எடை W கீழ்நோக்கிச் செயல்படுகிறது. சாய்தளத்தின் எதிர்விசை R புள்ளி P யில் செயல்படுகிறது. கயிற்றின் இழுவிசை P. P யின் லாமியின் தேற்றத்தின்படி

$$\frac{W}{\sin[90-(\gamma-\alpha)]} = \frac{T}{\sin(180-\alpha)} = \frac{R}{\sin(90+\gamma)}$$

①, ② லிருந்து

$$\Rightarrow \frac{W}{\cos(\gamma-\alpha)} = \frac{T}{\sin\alpha}$$

40

$$T = \frac{W \sin \alpha}{\cos(\gamma - \alpha)}$$

α சாய்வுக் கோணம் அது போது இழுவிசை T யை T_1 எனக் கொள்வோம்

$$\Rightarrow T_1 = \frac{W \sin \alpha}{\cos(\gamma - \alpha)}$$

β சாய்வுக் கோணம் அது போது இழுவிசை T யை T_2 எனக் கொள்வோம்

$$\Rightarrow T_2 = \frac{W \sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)}$$

கணக்கின் படி இழுவிசை இருமடங்காதலால்

$$2T_1 = T_2$$

$$\frac{W \sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)} = \frac{2W \sin \alpha}{\cos(\gamma - \alpha)}$$

$$\Rightarrow \sin \beta \cos(\gamma - \alpha) = 2 \sin \alpha \cos(\gamma - \beta)$$

$$\sin \beta (\cos \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \sin \alpha) = 2 \sin \alpha (\cos \gamma \cos \beta + \sin \gamma \sin \beta)$$

$$\cos \gamma \cos \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin \gamma \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \gamma \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \gamma \sin \beta$$

$$\sin \beta \cos \gamma \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$\sin \beta \cos \alpha \cos \gamma = \sin \alpha \{ 2 \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma$$

$$\cos \gamma \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (2 \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma$$

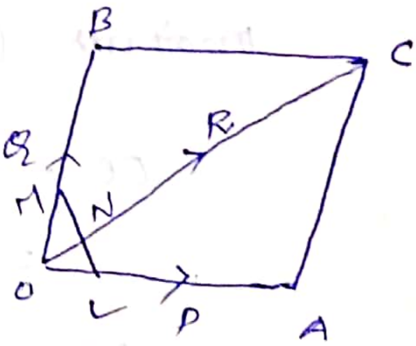
$\Rightarrow Q(Q-P) = 4Q^2\cos^2\alpha$ [∵ ① லிருந்து

$Q(Q-P) = R^2$ என நிறுவப்பட்டது.

6m ② (3)

விசைகள் P, Q நேர்க்கோடுகள் OA, OB வழிச் செயல்படுகிறது. இவற்றின் விளைவு விசை $R = OC$ வழியே செயல்படுகிறது. ஒரு நேர் கோடு இக்கோடுகளை L, M, N ல் சந்திக்கிறது எனில் $\frac{P}{OL} = \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}$ என நிறுவுக.

Proof :-



இங்கு $\vec{OA} = P$, $\vec{OB} = Q$ என்க. இணைகரம் $OACB$ யை பூர்த்தி செய்க. இவற்றின் விளைவு விசை $OC = R$ எனில்

$\frac{OA}{OL} = \lambda$ எனவும் $\frac{OB}{OM} = \mu$ எனவும்

எடுத்துக் கொள்க.

இதிலிருந்து

$OA = \lambda OL$

$OB = \mu OM$

ப.2 $\therefore OA + OB = \lambda OL + \mu OM$

λ, μ தேர்ந்தெடுப்பு,

$OA + OB = (\lambda + \mu) OK$ .... ①

இங்கு K என்பது N ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. இணைகர விதிப்படி

$OC = OA + OB$ ..... ②

சமன்பாடு ①, ② லிருந்து OC, $(\lambda + \mu) OK$ ஆகியவை சமமாகும். இதிலிருந்து புள்ளி K என்பது OC மீது இருக்கும்.

சமன்பாடு ①, ② லிருந்து

$$OC = (\lambda + \mu) OK$$
$$= (\lambda + \mu) ON$$

$$\Rightarrow \frac{OC}{ON} = \lambda + \mu$$

$$\frac{OA}{OL} + \frac{OB}{OM} = \frac{OC}{ON}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}$$ என நிறுவப்பட்டது.

6m ④ 43 செங்கோண முக்கோணம் A, B, C ல் $\angle A = 90^\circ$

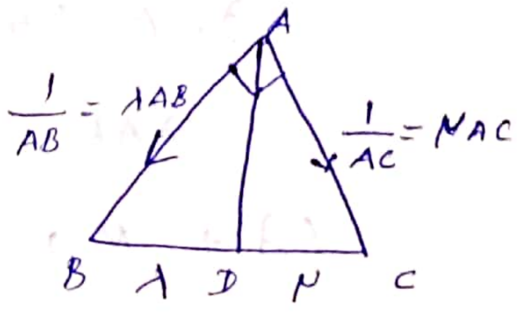
(x) (ii) $AD \perp BC$. AB வழியாக செயல்படும் விசை $\frac{1}{AB}$

AC வழியாக செயல்படும் விசை $\frac{1}{AC}$ எனில்

இவற்றின் விளைவு விசை என்பது AD வழியாகச்

செயல்படும் விசை $\frac{1}{AD}$ என நிறுவுக.

Proof :-



அடிக் கணிதப்படி

$$AB^2 = BC \cdot BD$$

$$AD^2 = BD \cdot CD$$

$$AC^2 = BC \cdot DC$$

AB வழியாக $\frac{1}{AB}$ என்ற விசை செயல்படுகிறது.

AC வழியாக $\frac{1}{AC}$ என்ற விசை செயல்படுகிறது.

அதாவது AB வழியாக $\frac{1}{(AB)^2} \cdot AB$ என்ற

விசை செயல்படுகிறது.

AC வழியாக $\frac{1}{(AC)^2} \cdot AC$ என்ற

விசை செயல்படுகிறது.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{(AB)^2} = \lambda \\ \frac{1}{(AC)^2} = \mu \end{array}\right\} \text{ என்க.}$$

இதிலிருந்து

$$\lambda(AB)^2 = 1$$

$$\mu(AC)^2 = 1$$

இவை இரண்டும் சமம். ஆதலால்

$$\lambda(AB)^2 = \mu(AC)^2$$

$$\lambda\, BC \cdot BD = \mu\, BC \cdot DC \quad \ldots\ldots (1)$$

λ, μ தேற்றத்தின் படி

λAB, μAC இவற்றின் விளைவு விசை $(\lambda + \mu) AD$ ஆகும்.

அதாவது AB வழியே செயல்படும் விசை $\frac{1}{AB}$ AC வழியே செயல்படும் விசை $\frac{1}{AC}$ ஆகியவற்றின் விளைவு விசை AD வழியே செயல்படும் $(\lambda + \mu) AD$ என்று இருக்கும். எனவே விளைவு விசையின் அளவு $(\lambda + \mu) AD$

$$\lambda AB + \mu AC = (\lambda + \mu) AD$$

$$= \left[\frac{1}{(AB)^2} + \frac{1}{(AC)^2}\right] AD$$

$$= \left[\frac{1}{BC \cdot BD} + \frac{1}{BC \cdot DC}\right] AD$$

4ந

$$= \left[\frac{DC + BD}{BC \cdot BD \cdot DC}\right] AD$$

$$= \left[\frac{BC}{BC \cdot BD \cdot DC}\right] AD$$

$$= \frac{1}{BD \cdot DC} AD$$

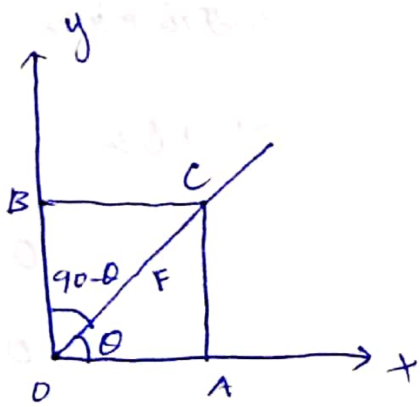
$$= \frac{1}{(AD)^2} AD$$

$$= \frac{1}{AD}$$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

30.6.04

ஒரு விசையின் கூறுகள் (அ) பிரிப்புகள்

Solution:-



விசை F என்பது OC யின் வழியே செயல்படுகிறது. OC என்ற கோடு OX உடன் θ கோணம் சாய்வில் உள்ளது என்க. மேலும்

$BC \perp OX$, $AC \perp OY$

சதுரம் OACB யில் விசை F ன் இரு கூறுகள் OA மற்றும் OB வழியே இருக்கும்.

46

Δ OAC ல்

$$\cos\theta = \frac{OA}{OC}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{OA}{F}$$

$$\Rightarrow OA = F\cos\theta$$

Δ OCB யில்

$$\sin\theta = \frac{OB}{OC}$$

$$\sin\theta = \frac{OB}{F}$$

$$\Rightarrow OB = F\sin\theta$$

ஒரு விசை F ன் கூறு θ கோணச்சாய்வில் உள்ள கோட்டுடன் $F\cos\theta$ என்றும் குத்து கூறுக்கு செங்குத்து விசை $F\sin\theta$ என்றும் இருக்கும்.

எனவே $\theta = 0^\circ$ எனில் $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 0^\circ = 0$

$OA = F$ மற்றும்

$OB = 0$

செங்குத்து நிலையில் $\theta = 90^\circ$ எனில் $\cos 90^\circ = 0$

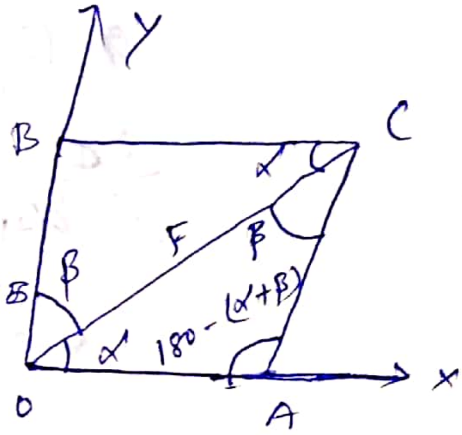
$\sin 90^\circ = 1$. எனவே அதன் கிடை நிலையின் கூறு

$OA = 0$ மற்றும்

செ.கு.அ. கூறு $\{ OB = F$

② கொடுத்துள்ள இரு திசைகளின் ஒரு விசையின் கூறு காணுதல் :-

Solution :-



விசை F என்பது OC வழியே செயல்படுகிறது. கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு திசைகள் OX, OY ஆகியவை OC-யுடன் முறையே α, β கோணச் சாய்வில் உள்ளது. OA மற்றும் OB, OX மற்றும் OY வழியே விசை OC யின் கூறுகள் ஆகும்.

ΔOAC யில் Sin வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்த.

$$\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{OC}{\sin[180-(\alpha+\beta)]}$$

$$\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{OC}{\sin(\alpha+\beta)}$$

①, ③ லிருந்து

$$\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{OC}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\Rightarrow OA = \frac{OC\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\Rightarrow OA = \frac{F \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

(1), (2) லிருந்து

$$\frac{OC}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{AC}{\sin\alpha}$$

$$AC = \frac{OC \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\Rightarrow OB = \frac{F \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

(3) விசை F ஐ 45° மற்றும் 15° உள்ள இரு திசைகளால் கூறிட்டால் இரண்டாவது விசைகள் கூறு $\frac{\sqrt{6}}{3}F$ என நிறுவுக.

Proof :-

விசையின் இரண்டாவது கூறு $= \frac{F \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

இங்கு $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$ எனக.

$$= \frac{F \sin 45^\circ}{\sin(45^\circ+15^\circ)}$$

$$= \frac{F \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sin 60'}$$

$$= \frac{F/\sqrt{2}}{\sqrt{3}/2}$$

$$= \frac{F}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{F}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \sqrt{2}\sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} F$$

மேலும் கீழும் $\sqrt{3}$ ஆல் பெருக்குக.

$$= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times F}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{6} F}{3}$$ என நிறுவப்பட்டது.

(4) விசை F ஐ 45°, 60° உள்ள இரு திசைகளில் பிரித்தால் முதல் மற்றும் இரண்டாவது கூறுகளை காண்க.

Solution :-

விசை முதல் கூறு $= \dfrac{F \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

50

இங்கு $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$ எனில்.

$$= \frac{\sin 60^\circ}{\sin(45^\circ + 60^\circ)}$$

$$= \frac{F \ \sqrt{3}/2}{\sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} F}{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cancel{= \frac{\sqrt{3}}{2} F \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

$$\cancel{= \frac{\sqrt{3}}{2} F \times \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} F}{\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} F \times \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$OA = \frac{F\sqrt{6}}{\sqrt{3} + 1}$$

இரண்டாவது விசையின் கூறு 5)

$$OB = \frac{F \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{F \sin 45^\circ}{\sin(45^\circ + 60^\circ)}$$

$$= \frac{F \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ}$$

$$= \frac{F/\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{F/\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}/2\sqrt{2}}$$

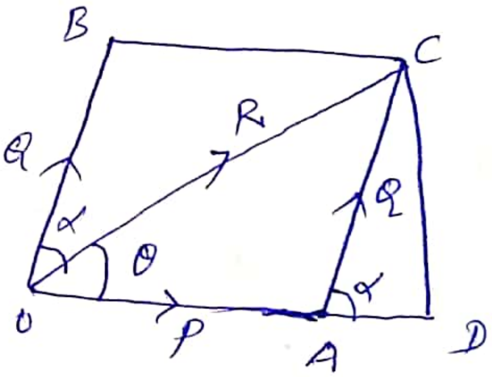
$$= \frac{F}{\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$$

$$OB = \frac{2F}{1+\sqrt{3}}$$

5. இரு விசைகள் P, Q இவற்றின் விளைவு விசை R, P யின் திசையில் R என்ற கூறின் அளவு Q எனில் விசைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$ என நிறுவுக.

Proof :-

OA, OB என்ற திசையில் P, Q விசைகள் செயல்படுகிறது. OA வழியே R ன் கூறு



$$R\cos\theta = OC \cdot \frac{OD}{OC}$$

$$\Rightarrow R\cos\theta = OD$$

$$OD = OA + AD$$

$$OD = P + Q\cos\alpha$$

∵ ΔACD ல்

$$\cos\alpha = \frac{AD}{AC}$$

$$AD = Q\cos\alpha$$

ஆனால் OA வழியே R ன் கூறு Q எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே, $Q = P + Q\cos\alpha$

$$P = Q - Q\cos\alpha$$

$$\Rightarrow P = Q(1-\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow P = Q\left\{2\sin^2 \frac{\alpha}{2}\right\}$$

$$\frac{P}{2Q} = \sin^2 \alpha/2$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{P}{2Q}}$$

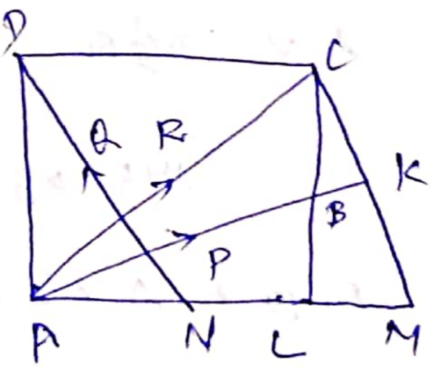
$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$$ என நிறுவப்பட்டது.

(5) விசைகளின் கூறுகளுக்கான தேற்றம்

Solution :- Case (1) :-

Statement :-



ஏதேனும் ஒரு திசையில் இரு விசைகளின் கூறுகளின் இயற்கணித கூடுதல் அவ்விசைகளின் விளைவு விசையின் அதே திசையின் பிரிக்கப்பட்ட கூறுக்குச் சமம்.

Proof :-

AB, AD என்பவை விசைகள் P, Q வை குறிக்கிறது. AX வழியாக விசைகள் பிரிக்கப் படுகிறது என்க.

இணைகரம் ABCD யின் மூலைவிட்டம் AC வழியாக இணை விசை R செயல்படுகிறது. DN, C CM ஆகியவை AX க்கு செங்குத்துக் கோடுகள் AL, AM, AN ஆகியவை முறையே AX வழியே P, Q, R ன் கூறுகளாகும்.

எனவே AX வழியே P யின் கூறு = AL

AX வழியே Q வின் கூறு = AN

AX வழியே R ன் கூறு = AM

அதாவது AX யின் வழியே P யின் கூறு + AX யின் வழியே Q வின் கூறு = AX யின் வழியே R ன் கூறு.

AL + AN = AM என நிறுவ வேண்டும்

ΔADN, ΔBCK என்பவை வடிவொத்தவை.

எனவே AN = BK

$BK = LM$

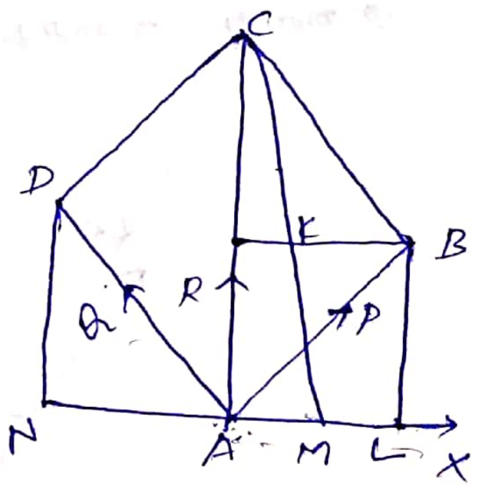
$AL + AN = AL + BK$

$AL + LM = AM$

1.7.0A

Case ② :-

AD, Ax உடன் விரிகோணம் அமைவில் இருக்கும் போது :-



Ax அச்சிலே Q வின் வீழ்ப்பு $= -AN$

Ax அச்சிலே P யின் வீழ்ப்பு $= AL$

Ax அச்சிலே R இன் வீழ்ப்பு $= AM$

எனவே $AL + (-AN) = AM$ என நிறுவ வேண்டும்.

$\triangle ADN$, $\triangle BCK$ என்பவை ஒருங்கமைந்தவை.

எனவே $AN = BK$, $BK = LM$

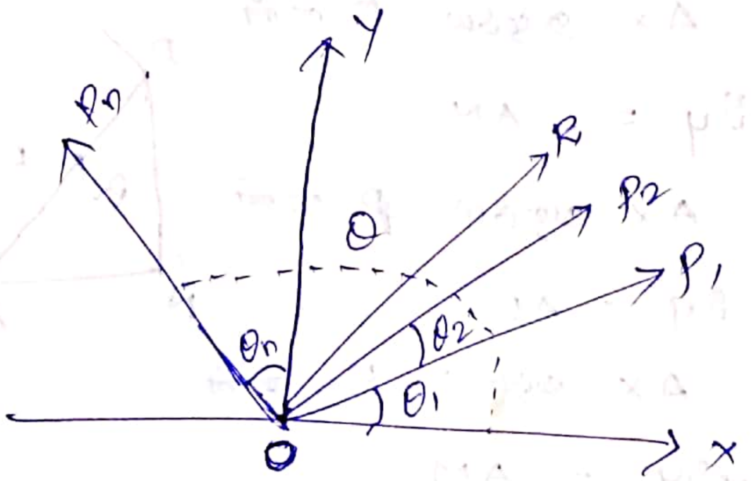
$AL + (-AN)$

$\Rightarrow AL + (-LM) = AM$

NOTE :-

மேற்கண்ட தேற்றத்தை ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் பல விசைகளின் விளைவு விசைக்கும் பயன்படுத்தலாம்.

(2) ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் ஒருதள விசைகளின் விளைவு விசையை காணுதல் :-



Solution :-

புள்ளி O வில் விசைகள் $P_1, P_2, \ldots P_n$ அவ்வாறு செயல்படுகிறது. O வழியே ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான கோடுகள் OX, OY வரைக. விசைகள் $P_1, P_2, \ldots P_n$ முறையே OX உடன் $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ என்ற கோணச் சாய்வில் உள்ளது எனக. இந்த விசைகளின் விளைவு விசை R எனக. அது OX உடன் θ கோண சாய்வில் உள்ளது

என்க.

முந்தைய தேற்றப்படி OX அச்சில் P_1 ன் எறிப்பு + OX அச்சில் P_2 ன் எறிப்பு + ... + OX அச்சில் P_n ன் எறிப்பு = OX அச்சில் தொகுபயன் விசை R ன் எறிப்பு

$$P_1 \cos\theta_1 + P_2 \cos\theta_2 + \cdots + P_n \cos\theta_n = R\cos\theta = x \quad \ldots (1)$$

$$P_1 \sin\theta_1 + P_2 \sin\theta_2 + \cdots + P_n \sin\theta_n = R\sin\theta = y \quad \ldots (2)$$

இவற்றை (1), (2) ஐ வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டுக.

$$R^2 = x^2 + y^2$$

தொ. விசையின் அளவு $R = \sqrt{x^2+y^2}$

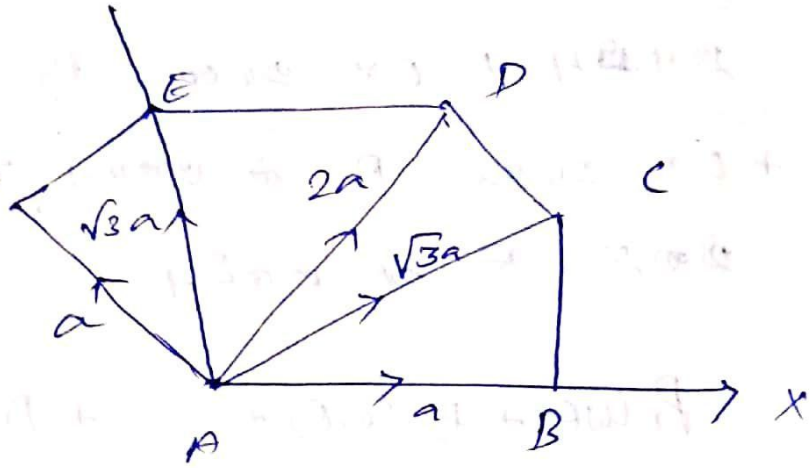
$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x}$

தி. திசை $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

(3) ஒரு ஒழுங்கு அறுங்கோணம் ABCDEF ன் உந்து விசைகள் AB, AC, AD, AE, AF என்ற பக்க அளவில் a, $\sqrt{3}a$, $2a$, $\sqrt{3}a$, a எனில் செயல்படுகிறது எனில் அதன் தொகுபயன் விசையின் அளவு $R = 6a$ என நிறுவுக.

58

Proof :-



AB வழியே R ன் பிரிவு = AB வழியே (AB யின் பிரிவு + AC யின் பிரிவு + AD ன் பிரிவு + AE ன் பிரிவு + AF ன் பிரிவு)

$$X = R\cos\theta = a\cos 0 + \sqrt{3}a\cos 30 + 2a\cos 60 + \sqrt{3}a\cos 90 + a\cos 120$$

$$= a + \sqrt{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} + 2a\frac{1}{2} + \sqrt{3}a\,(0) + a\cos(180-60)$$

$$= a + \frac{3a}{2} + a - a\frac{1}{2}$$

$$= 2a + \frac{3a}{2} - \frac{a}{2}$$

$$= \frac{4a + 3a - a}{2}$$

$$\left[\because \cos(180-\theta) = -\cos\theta\right.$$

$$= \frac{6a}{2}$$

$$= 3a$$

$$y = R\sin\theta = a\sin 0 + \sqrt{3}\,a\sin 30 + 2a\sin 60$$
$$+ \sqrt{3}\,a\sin 90 + a\sin 120$$

$$= a(0) + \sqrt{3}\,a\,\frac{1}{2} + 2a\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\,a(1)$$
$$+ a\sin(180-60)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}a + a\sqrt{3} + \sqrt{3}\,a + a\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,a + 2a\sqrt{3} + 2a\sqrt{3} + a\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{6a\sqrt{3}}{2} \qquad \left[\because \sin(180-\theta) = \sin\theta\right]$$

$$\therefore y = 3a\sqrt{3}$$

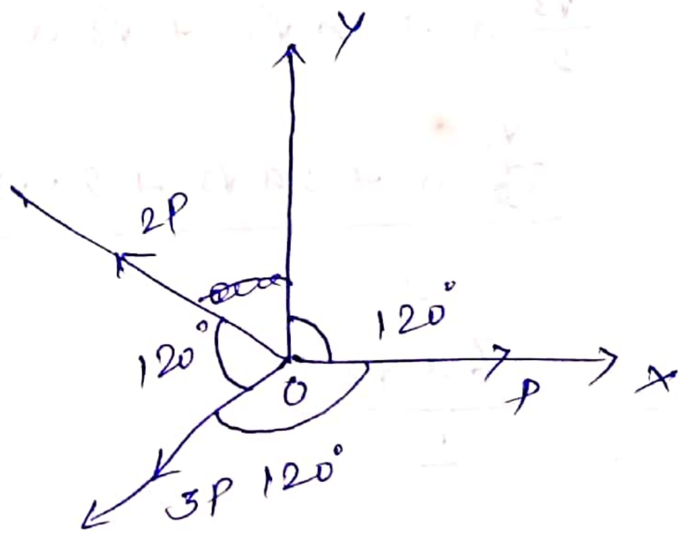
$$x = 3a$$

$$R = \sqrt{9a^2 + 27a^2}$$
$$= \sqrt{36a^2}$$

$R = 6a$ என நிறுவப்பட்டது.

④ ஒரு புள்ளியில் மூன்று விசைகள் $P, 2P, 3P$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று 120° அளவில் செயல் படுகிறது எனில் விளைவு விசையின் அளவு மற்றும் திசையைக் காண்க.

Solution :-



$\left[\because \cos(180+\theta) = -\cos\theta \right.$

கிடைத்த விசைகளின் R ன் தொகுப்பு

$$X = R\cos\theta = P\cos 0 + 2P\cos 120 + 3P\cos 240$$

$$= P + 2P\cos(180-60) + 3P\cos(180+60)$$

$$= P + 2P\left(\frac{-1}{2}\right) + 3P\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$= P - P - \frac{3P}{2}$$

$$X = -\frac{3P}{2}$$

செங்குத்து திசையில் R ன் கூறு y

$$y = R\sin\theta = R\sin 0 + 2P\sin 120 + 3P\sin 240$$

$$= 2P\sin(180-60) + 3P\sin(180+60)$$

$$= 2P\sin 60^\circ + 3P\sin 60^\circ$$

$$= 2P\frac{\sqrt{3}}{2} + 3P\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\sin(180+\theta) = -\sin\theta$

$$= \frac{2\sqrt{3}P - 3P\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{-P\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \sqrt{\frac{9P^2}{4} + \frac{3P^2}{4}}$$

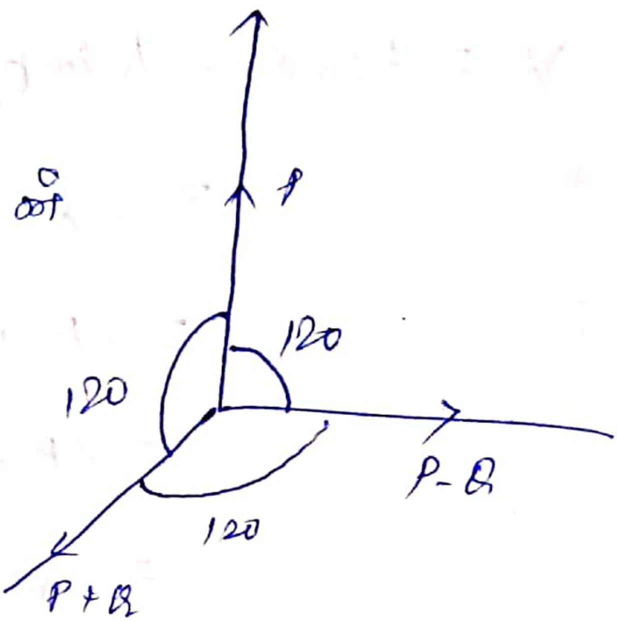
$$= \sqrt{\frac{12P^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{3P^2}{\cancel{4}}}$$

$$R = P\sqrt{3}$$

(5) சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு இணையாக ஒரு புள்ளி வழியே $P-Q$, P, $P+Q$ ஆகிய விசைகள் செயல்படுகிறது எனில் விளைவு விசையின் அளவு மற்றும் திசையை காண்க.

62 Solution :-



கிடைத்தள திசையில் R ன் கூறு :-

$$X = R\cos\theta = (P-Q)\cos 0 + P\cos 120 + (P+Q)\cos 240$$

$$= (P-Q) + P\cos(180-60) + (P+Q)\cos(180+60)$$

$$= (P-Q) - P\cos 60^\circ - (P+Q)\cos 60^\circ$$

$$= P - Q - \frac{P}{2} - \frac{P}{2} - Q/2$$

$$= P - Q - P - \frac{Q}{2}$$

$$= \frac{-2Q - Q}{2} = \frac{-3Q}{2}$$

செங்குத்துத் திசையில் R ன் கூறு

$$Y = R\sin\theta = (P-Q)\sin 0 + P\sin 120^\circ + (P+Q)\sin 240$$

$$= 0 + P\sin(180-60) + (P+Q)\sin(180+60)$$

$$= P\frac{\sqrt{3}}{2} - (P+Q)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

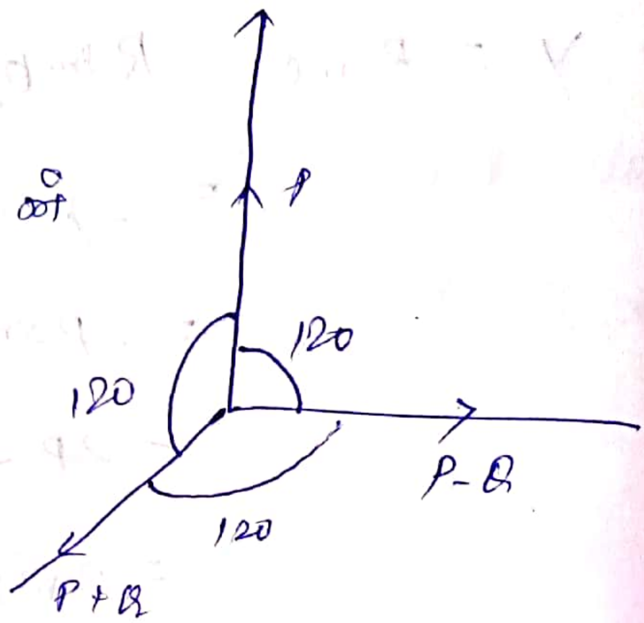
$$= -Q\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Scanned with CamScanner

62

Solution :-

கிடைத்தள திசையில் R ன் கூறு :-



$$X = R\cos\theta = (P-Q)\cos 0 + P\cos 120 + (P+Q)\cos 240$$

$$= (P-Q) + P\cos(180-60) + (P+Q)\cos(180+60)$$

$$= (P-Q) - P\cos 60^\circ - (P+Q)\cos 60^\circ$$

$$= P - Q - \frac{P}{2} - \frac{P}{2} - Q/2$$

$$= P - Q - P - \frac{Q}{2}$$

$$= \frac{-2Q - Q}{2} = \frac{-3Q}{2}$$

செங்குத்து திசையில் R ன் கூறு

$$Y = R\sin\theta = (P-Q)\sin 0 + P\sin 120 + (P+Q)\sin 240$$

$$= 0 + P\sin(180-60) + (P+Q)\sin(180+60)$$

$$= P\frac{\sqrt{3}}{2} - (P+Q)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -Q\frac{\sqrt{3}}{2}$$

தொகுபயன் $R = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{9Q^2}{4}+\frac{3Q^2}{4}} = \sqrt{\frac{12Q^2}{4}}$ 3

$\Rightarrow R = \sqrt{3Q^2} = Q\sqrt{3}$

திசையின் அளவு $\tan\theta = \frac{y}{x}$

$$\tan\theta = \frac{+Q\frac{\sqrt{3}}{2}}{+\frac{3Q}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (\text{or})$$

$$\theta = 30^\circ$$

5.7.04

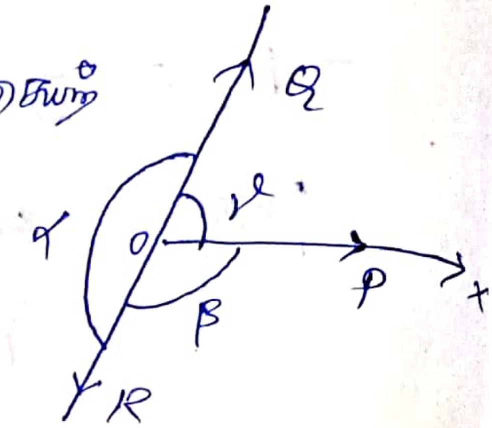
(1) ஒரு புள்ளியில் உள்ள 4 விசைகள் P, Q, R என்ற திசைகள் செயல்படுகிறது. R, Q P, R, P, Q இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணங்கள் முறையே α, β, γ எனில் அவற்றின் விளைவு விசை

$$\sqrt{P^2+Q^2+R^2+2QR\cos\alpha+2PR\cos\beta+2PQ\cos\gamma}$$ என

நிறுவுக.

Proof :-

விசை P என்பது $\wedge$ OX திசையில் செயல்படுகிறது என்க. விசைகளை OX க்கு இணையாகவும் செங்குத்தாகவும் பகுக்க.



இணைவு விசை R என்பது $\wedge$ OX உடன் θ கோண சாய்வில் உள்ளது என்க. எனவே OX ன் அச்சு வழியே R ன் பகுப்பு

$$R\cos\theta = P\cos 0 + Q\cos\gamma + R\cos(\alpha+\gamma) \quad \ldots (1)$$

செங்குத்து திசையில் அதாவது OY ன் அச்சு வழியே R ன் பகுப்பு

$$R\sin\theta = P\sin 0 + Q\sin\gamma + R\sin(\alpha+\gamma) \quad \ldots (2)$$

சமன்பாடு (1), (2) ஐ வர்க்கப்படுத்தி கூட்ட

$$\Rightarrow R^2 = [P + Q\cos\gamma + R\cos(\alpha+\gamma)]^2 + [Q\sin\gamma + R\sin(\alpha+\gamma)]^2$$

$$= P^2 + Q^2\cos^2\gamma + R^2\cos^2(\alpha+\gamma) + 2PQ\cos\gamma + 2RQ\cos\gamma\cos(\alpha+\gamma) + 2PR\cos(\alpha+\gamma) + Q^2\sin^2\gamma + R^2\sin^2(\alpha+\gamma) + 2QR\sin\gamma\sin$$

$$\Rightarrow R^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos\gamma + 2PR\cos(\alpha+\gamma) + 2QR\cos[\gamma - (\alpha+\gamma)]$$

$$= P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos\gamma + 2PR\cos\beta + 2QR\cos\alpha.$$

$\cos(360-\beta)$
$\cos\beta$
$\cos(-\theta)$
$= \cos\theta$

$$\Rightarrow R = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos\gamma + 2PR\cos\beta + 2QR\cos\alpha}$$

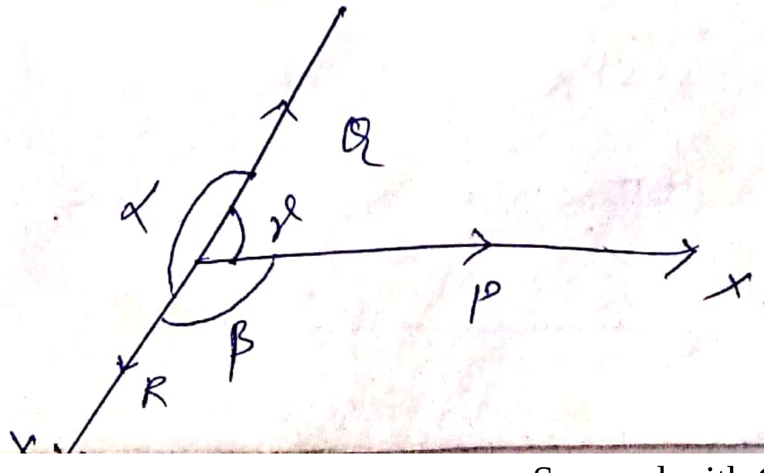
என நிறுவப்பட்டது.

(2) ஒரு புள்ளியின் P, Q, R என்ற விசைகள் ΔABCன் பக்கங்கள் BC, CA, AB இவற்றிற்கு இணையாக செயல்படுகிறது எனில் அவற்றின் விளைவு விசை

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 - 2QR\cos A - 2RP\cos B - 2PQ\cos C}$$

என நிறுவுக.

Proof :-



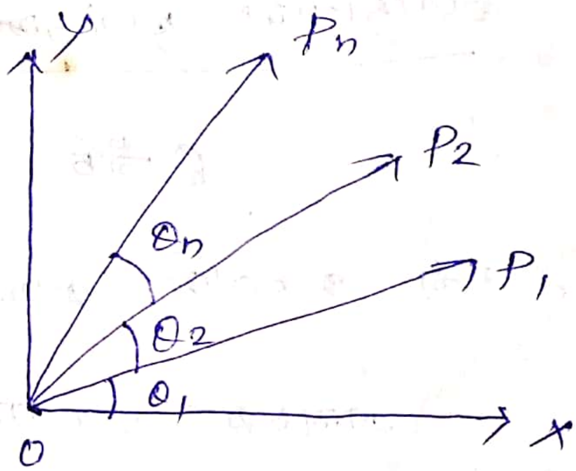
$(\alpha+\gamma)$

4. 3.

ஒரு துகளில் செயல்படும் அனைத்து ஒருதள விசைகளும் சமநிலையில் இருக்க தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனையைக் காண்க.

Solution :-

புள்ளி



தேவையான நிபந்தனை :-

புள்ளி O-வில் உள்ள துகளின் $P_1, P_2, \ldots, P_n$ என்ற சம தள விசைகள் செயல்படுவதால் இதன் விளைவு விசை $R = \sqrt{X^2+Y^2}$ ஆகும்.

இங்கு X, Y என்பன O வழியே செல்லும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான கோடுகள் OX, OY திசைகளின் கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை பெறும்

விசைகள் சமநிலையில் இருப்பதால் அதன் விளைவு விசை $R = 0$

அதாவது $\sqrt{x^2+y^2} = 0$

$$x^2+y^2 = 0$$

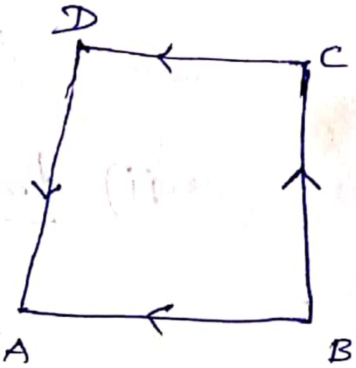
$$x = 0, \quad y = 0$$

போதுமான நிபந்தனை :-

இங்கு $x = 0$, $y = 0$ என இருப்பின் அதன் விளைவு விசை $R = \sqrt{x^2+y^2} = 0$ எனவே விசைகள் சமநிலையில் உள்ளது.

① நாற்கரம் ABCD ன் விசைகள் BA, BC, CD, DA வழியாக செயல்படுகிறது எனில் இதன் விளைவு விசையைக் காண்க.

<u>Solution :-</u>



$$\vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{BA}$$

$$\Rightarrow \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{BA} = \vec{BA} + \vec{BA}$$

$$\Rightarrow \qquad = 2\vec{BA}$$

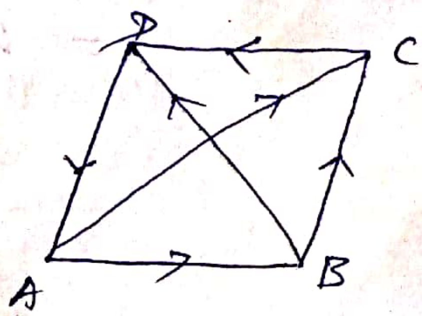
② இணைகரம் ABCD ல் செயல்படும் விசைகள் அளவிலும் திசையிலும் கீழ்க்கண்டவாறு கொள்வோம்.

i) AB, 2BC, 2CD, DA வழியாக செயல்படுகிறது எனில் அதன் விளைவு விசையைக் காண்க.

ii) AB, 2BC, 2CD, DA, DB எனப் பிரிக்கப்பட்டால் இவற்றின் விசைகள் சமநிலையில் உள்ளது எனக் காட்டுக.

iii) AB, BC, AD, DC எனில் அவற்றின் விளைவு விசையைக் காண்க.

i) <u>Solution :-</u>



$= AB + 2BC + 2CD + DA$

$= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{CD} + \vec{DA}$

$= \vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CA}$

$= -\vec{CA} + \vec{BD} + \vec{CA}$

$= \vec{BD}$

ii) Proof :-

$= \vec{AB} + 2\vec{BC} + 2\vec{CD} + \vec{DA} + \vec{DB}$

$= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{DB}$

$= \vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CA} + \vec{DB}$

$= -\vec{CA} - \vec{DB} + \vec{CA} + \vec{DB}$

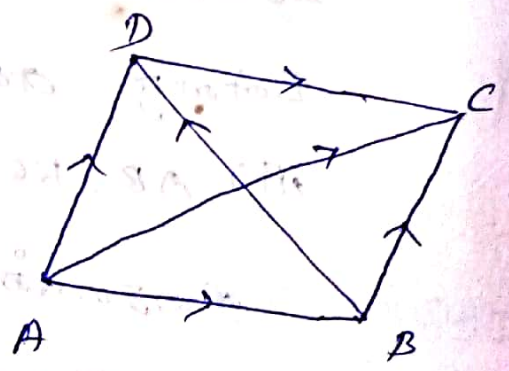
$= \vec{0}$ என நிறுவப்பட்டது.

iii) Solution :-

$= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AD} + \vec{DC}$

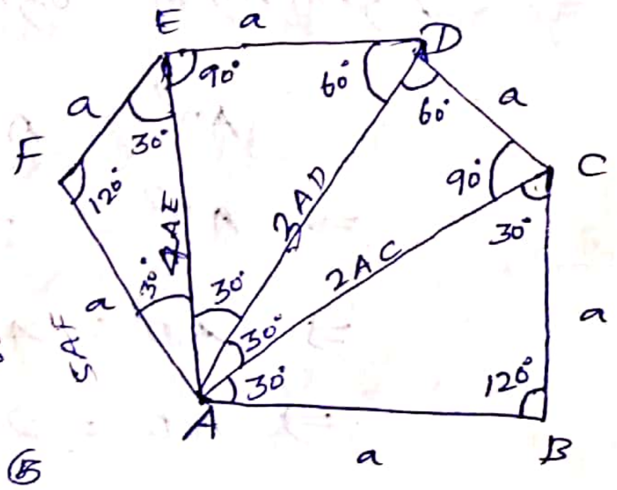
$= \vec{AC} + \vec{AC}$

$= 2\vec{AC}$



(3) ஒரு ஒழுங்கு அறுங்கோணம் ABCDEF ன் புள்ளி A ல் விசைகள் AB, 2AC, 3AD, 4AE மற்றும் 5AF ஆகிய விசைகள் செயல்படுகின்றன. இவற்றின் விளைவு விசையின் அளவு $R = \sqrt{351}\, a$ எனவும் இவ்விளைவு விசை AB உடன் $\tan^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)$ கோணச் சாய்வில் செயல்படும் என நிறுவுக.

Proof :-



ஒழுங்கு அறுங்கோணத்தின் ஒவ்வொரு பக்கமும் a என்க. ஒழுங்கு அறுங்கோணம் என்பதால் ஒவ்வொரு பக்கமும் 120° ஆகும். இங்கு ΔABC, ΔAEF என்பன ஒரு இருசமபக்க முக்கோணமாகும்.

ΔACD, ΔAED என்பன செங்-கோணமாகும்.

72

இருசமபக்க முக்கோணம் ΔABC யில்

$$AC = 2AB\cos 30^\circ$$

$$= 2a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= a\sqrt{3}$$

|||ly

$$AE = a\sqrt{3}$$

செங்கோண முக்கோணம் AED யில்

பித்தாகரஸ் தேற்றப்படி

$$AD^2 = AE^2 + ED^2$$

$$\Rightarrow AD^2 = 3a^2 + a^2$$

$$\Rightarrow AD^2 = 4a^2$$

$$\Rightarrow AD = 2a$$

AB, 2AC, 3AD,
a, $2a\sqrt{3}$, $6a$
4AE, 5AF
$4a\sqrt{3}$, $5a$.

ஒழுங்கு அறுங்கோணம் ABCDEF ல் $a, 2a\sqrt{3}, 6a, 4a\sqrt{3}, 5a$ என்றவாறு அதன் திசைகளின் அளவுகள் செயல்படுகிறது.

AB-யின் அதன் கிடைத்திசையின் பகுதி,

$$x = a\cos 0 + 2a\sqrt{3}\cos 30 + 6a\cos 60 + 4a\sqrt{3}\cos 90 + 5a\cos 120$$

$$= a + 2a\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 6a\,\frac{1}{2} + 4a\sqrt{3}\,(0) + 5a\cos(180-60)$$

$$= a + 3a + 3a + 0 - \cos 60°$$

$$= 7a - \frac{5a}{2}$$

$$= \frac{14a - 5a}{2}$$

$$x = \frac{9a}{2}$$

AB வழி அதன் செங்குத்து நிலையில் பார்க்க.

$$y = a\sin 0 + 2a\sqrt{3}\sin 30 + 6a\sin 60°$$

$$+ 4a\sqrt{3}\sin 90° + 5a\sin 120$$

$$= a(0) + 2a\sqrt{3}\,\frac{1}{2} + 6a\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 4a\sqrt{3}\,(1)$$

$$+ 5a\sin(180-60)$$

$$= 0 + a\sqrt{3} + 3\sqrt{3}a + 4a\sqrt{3}$$

$$+ 5a \times \frac{+\sqrt{3}}{2}$$

$$= 8a\sqrt{3} + \frac{5a\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{16a\sqrt{3} + 5a\sqrt{3}}{2}$$

$$y = 21a\sqrt{3}/2$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{9a}{2}\right)^2 + \left(\frac{21a\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{81a^2}{4} + \frac{441a^2 \times 3}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{81a^2}{4} + \frac{1323a^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{1404a^2}{4}}$$

$$= \sqrt{351a^2}$$

$R = \sqrt{351}\, a$ என நிறுவப்பட்டது

$$21 \times 21$$
$$\begin{array}{r} 21 \\ 42 \\ \hline 441 \times 3 \\ \hline 1323 \end{array}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{21a\sqrt{3}/2}{9a/2}$$

$$= \frac{21a\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{9a}$$

$$\tan\theta = \frac{21\sqrt{3}}{9}$$

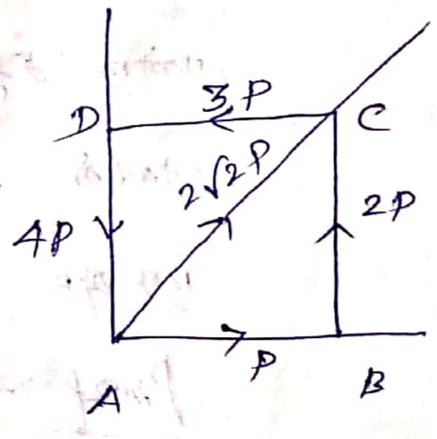
$$\tan\theta = \frac{7 \times \cancel{3}\sqrt{3}}{3 \times \cancel{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{7}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)$$ என நிறுவப்பட்டது.

(4) சதுரம் ABCD இன் AB, BC, CD, DA மற்றும் AC வழியாக விசைகள் P, 2P, 3P, 4P, $2\sqrt{2}P$ என்பன திசை சுற்றுவருகிறது எனில் இவ்விசைகள் சமநிலையில் உள்ளது என நிறுவுக.

<u>Proof</u> :-



கிடைத்திசையின் X வழி கூறு

$$X = P\cos 0 + 2P\cos 90 - 3P\cos 0 - 4P\cos 90 + 2\sqrt{2}P\cos 45$$

$$\Rightarrow X = P(1) + 2P(0) - 3P(1) - 4P(0) + 2\sqrt{2}P\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= P + 0 - 3P - 0 + 2P$$

$$X = 0$$

செங்குத்துத் திசையில் Y ன் கூறு

$$Y = P\sin 0 + 2P\sin 90 - 3P\sin 0 - 4P\sin 90 + 2\sqrt{2}P\sin 45$$

$$= P(0) + 2P(1) - 3P(0) - 4P(1) + 2\sqrt{2}P\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 0 + 2P - 0 - 4P + 2P$$

$$Y = 0$$

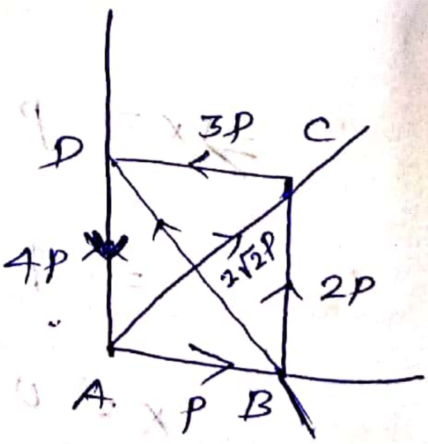
எனவே விசைகள் சமநிலையில் உள்ளது.

(5) ஒரு புள்ளியில் அமையும் நிலைகளும் விசைகள் AB, $2BC$, $2CD$, DA, DB ஆகியவை $ABCD$ என்ற சதுரத்தின் பக்கங்களில் குறிக்கப்படுகிறது எனில் அவ்விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும் என நிறுவுக.

Proof :-

$$\vec{AB} + 2\vec{BC} + 2\vec{CD} + \vec{DA} + \vec{DB}$$

$$= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{DB}$$

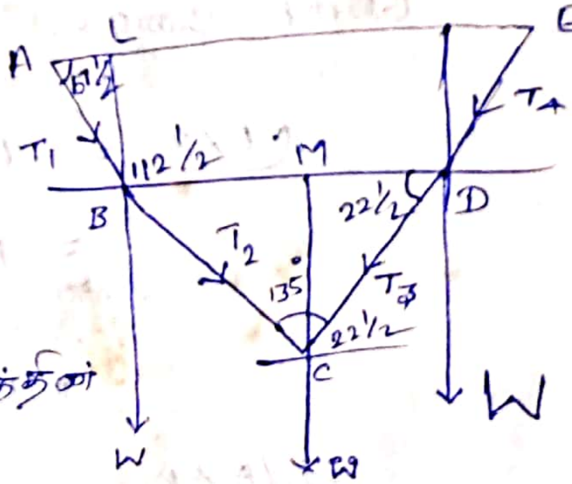


$$= \vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CA} + \vec{DB}$$

$$= -\vec{CA} - \vec{DB} + \vec{CA} + \vec{DB}$$

$$= \vec{0}$$ //

(1) AE என்ற நூலின் B, C, D என்ற புள்ளிகளில் w, ω, W என்ற எடைகள் தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. B, C, D என்ற புள்ளிகள் நூலை நான்கு சம பாகங்களாக பிரிக்கிறது. AE கிடைமட்டத்தில் உள்ளது. இவ்வமைப்பு ஒரு ஒழுங்கு பல்கோணத்தின் தொடர்ச்சியாக நான்கு பக்கங்கள் அமைப்பில் உள்ளது எனில் $w = (\sqrt{2}+1)\omega$ என நிறுவுக.



Proof :-

ABCDE என்பது ஒரு ஒழுங்கு பல்கோணத்தின்

n பக்கம் உள்ள ஒரு பல்கோணத்தின் உள்கோணம் காண வாய்ப்பாடு

$$\frac{2n-4}{n} \times 90^\circ \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $n = 8$ என்பதால்

$$\frac{2(8)-4}{8} \times 90 = \frac{270}{2}$$

$$= 135^\circ$$

AB, BC, CD, DE இதன் மேல் இழு- விசைகள் T_1, T_2, T_3, T_4 செயல்படுகிறது.

ABCD யில் $\angle CBD = \angle CDB = 22\frac{1}{2}$ ஆகும்.

$$\therefore \angle ABD = \angle ABC - \angle DBC$$

$$= 135 - 22\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \angle ABD = 112\frac{1}{2}$$

B இருந்து AE க்கு BL என்ற செங்குத்து கோடு வரைக.

$$\angle EAB = 180 - \angle ABD$$

$$= 180 - [\angle CDE - \angle BDC]$$

$$= 180 - 135 + 22\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \angle EAB = 67\frac{1}{2}$$

B யில் லாமியின் தேற்றத்தை பயன்படுத்த

$$\frac{T_1}{\sin(90 - 22\frac{1}{2})} = \frac{T_2}{\sin(180 - 22\frac{1}{2})} = \frac{W}{\sin(180 - 45)}$$

(ii), (iii) லிருந்து

$$\Rightarrow T_2 = \frac{W \sin 22\frac{1}{2}}{\sin 45} \quad \ldots\ldots (1)$$

C யில் லாமியின் தேற்றத்தை பயன்படுத்த

$$\frac{T_2}{\sin(90 - 22\frac{1}{2})} = \frac{T_3}{\sin(180 - 22\frac{1}{2})} = \frac{\omega}{\sin(180 - 45)}$$

(i), (iii) லிருந்து

$$T_2 = \frac{\omega \cos 22\frac{1}{2}}{\sin 45} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow 1 = \frac{W}{\omega} \tan 22\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tan 22\frac{1}{2} = \frac{\omega}{W} \quad \ldots\ldots (3)$$

$$\tan 45 = \frac{2\tan 22\frac{1}{2}}{1-\tan^2 22\frac{1}{2}} \qquad \left\{ \because \tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} \right.$$

இங்கு $\tan 22\frac{1}{2} = t$ என்க.

$$1 = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\Rightarrow 2t = 1-t^2$$

$$t^2+2t-1 = 0$$

1 ஐ கூட்டி கழிக்க

$$t^2+2t-1+1-1 = 0$$

$$t^2+2t+1-2 = 0$$

$$\Rightarrow t^2+2t+1 = 2$$

$$\Rightarrow (t+1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow (t+1) = \sqrt{2}$$

Scanned with CamScanner

80

$$\Rightarrow t = \sqrt{2} - 1$$

$$\tan 22\frac{1}{2} = \sqrt{2} - 1 \quad \ldots\ldots (4)$$

(4) ன் மதிப்பை (3) ல் பிரதியிட

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{\omega}{W}$$

$$\Rightarrow W = \frac{\omega}{\sqrt{2} - 1}$$

⇒ $\sqrt{2} + 1$ ஆல் பெருக்கி வகுக்க

$$W = \frac{\omega(\sqrt{2}+1)}{2-1}$$

⇒ $W = (\sqrt{2}+1)\omega$ என நிரூபிக்கப்பட்டது

10m

(2) (6) △ABC ன் செங்குத்துக்கோடுகள் OA, OB, OC வழியாக செயல்படும் விசைகள் P, Q, R ஆனவை சமநிலையில் உள்ளது எனில்

i) O சுற்றுவட்ட மையம் எனில்

$$P : Q : R = a^2(b^2+c^2-a^2) : b^2(c^2+a^2-b^2) : c^2(a^2+b^2-c^2)$$

எனவும்

ii) O உள்வட்ட மையம் எனில்

$$P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$$ எனவும்

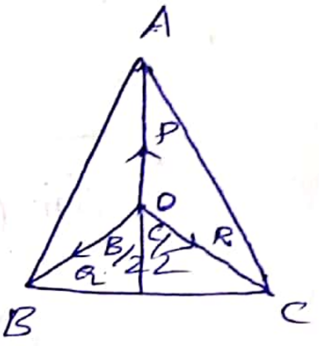
iii) O செங்கோட்டு சந்தி எனில் $P : Q : R = a : b : c$ எனவும்

81

iv) O புவியீர்ப்பு மையம் எனில்

$P : Q : R = OA : OB : OC$ எனவும் நிறுவுக.

Proof(ii) -



Δ - த்தின் பக்கங்களின் மையக்குத்து கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி அதன் உள்வட்டமையமாகும்.

இங்கு Δ ABC ல்

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

இருபுறமும் 2 ஆல் வகுக்க

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90$$

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90 - \frac{C}{2} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{A}{2} + \frac{C}{2} = 90 - \frac{B}{2} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90 - \frac{A}{2} \quad \ldots\ldots (3)$$

ΔABC-ல் லாமியின் தேற்றத்தை பயன்படுத்த

$$\frac{P}{\sin(BOC)} = \frac{Q}{\sin(AOC)} = \frac{R}{\sin(AOB)}$$

$$\frac{P}{\sin\left[180-\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)\right]} = \frac{Q}{\sin\left[180-\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)\right]} + \frac{R}{\sin\left[180-\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\right]} \quad \text{---} ④$$

சமன்பாடு ①, ②, ③ & ④ லிருந்து

$$\frac{P}{\sin\left(90+\frac{A}{2}\right)} = \frac{Q}{\sin\left(90+\frac{B}{2}\right)} = \frac{R}{\sin\left(90+\frac{C}{2}\right)}$$

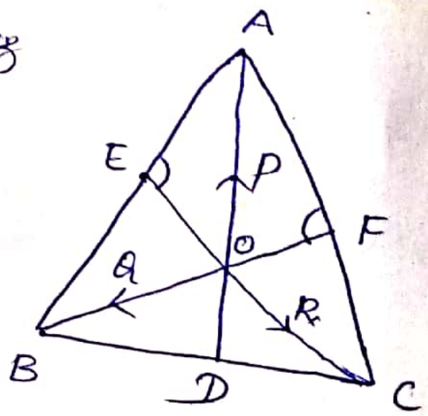
$$\frac{P}{\cos A/2} = \frac{Q}{\cos B/2} = \frac{R}{\cos C/2}$$

$$\therefore P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$$

என நிறுவப்பட்டது.

Proof (iii) :-

படத்தில் O என்பது செங்கோட்டு சந்தி ஆகும். AD, BF, CE என்பன முறையே செங்குத்துக் கோடுகளாகும்.



AFOE என்பது ஒரு வட்ட நாற்கரம் ஆகும். ஏனெனில் $\angle E + \angle F = 180°$

$\therefore \angle E = 90°$ & $\angle F = 90°$

வட்ட நாற்கரத்தின் எதிரெதிர் கோணங்களின் கூடுதல் 180° எனவே 83

$$\angle E + \angle E = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle EOF = 180^\circ$$

$$\angle EOF = 180 - A$$

$$\angle BOC = 180 - A \quad \text{.....} (1)$$

|||ly $$\angle AOB = 180 - C \quad \text{.....} (2)$$

|||ly $$\angle AOC = 180 - B \quad \text{.....} (3)$$

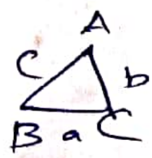
$\triangle ABC$ ல் லாமியின் தேற்றத்தை பயன்படுத்த

$$\frac{P}{\sin(BOC)} = \frac{Q}{\sin(AOC)} = \frac{R}{\sin(AOB)} \quad \text{.....} (4)$$

(1), (2), (3) ஐ (4) ல் இட

$$\frac{P}{\sin(180-A)} = \frac{Q}{\sin(180-B)} = \frac{R}{\sin(180-C)}$$

$$\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$$

$$\frac{P}{a/k} = \frac{Q}{b/k} = \frac{R}{c/k}$$

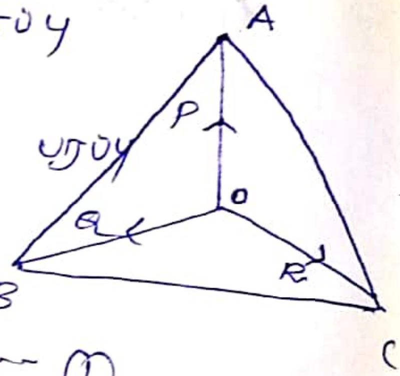
$$\Rightarrow P : Q : R = a : b : c$$ என நிறுவப்பட்டது

84

proof iv.) O சமபரப்பு மையம் எனில்

$\triangle ABC$ ன் பரப்பு $= 3\,\triangle BOC$ ன் பரப்பு

$= 3\,\triangle AOC$ ன் பரப்பு $= 3\,\triangle AOB$ ன் பரப்பு



$\triangle BOC$ ன் பரப்பு $= \frac{1}{3}\,\triangle ABC$ ன் பரப்பு ...... ①

$\triangle AOC$ ன் பரப்பு $= \frac{1}{3}\,\triangle ABC$ ன் பரப்பு ...... ②

$\triangle AOB$ ன் பரப்பு $= \frac{1}{3}\,\triangle ABC$ ன் பரப்பு ...... ③

$\triangle BOC$ ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}(OB)(OC)\sin(BOC)$

$\Rightarrow \sin(BOC) = \dfrac{2\,\triangle BOC \text{ ன் பரப்பு}}{(OB)(OC)}$ ...... ④

சமன்பாடு ① ஐ ④ ல் பிரதியிட

$\sin(BOC) = \dfrac{\frac{2}{3}\,\triangle ABC \text{ ன் பரப்பு}}{(OB)(OC)}$ ...... ⑤

|||ly

$\sin(AOC) = \dfrac{\frac{2}{3}\,\triangle ABC \text{ ன் பரப்பு}}{(OA)(OC)}$ ...... ⑥

$\sin(AOB) = \dfrac{\frac{2}{3}\,\triangle ABC \text{ ன் பரப்பு}}{(OA)(OB)}$ ...... ⑦

Scanned with CamScanner

$\triangle ABC$ ல் லாமியின் தேற்றத்தை பயன்படுத்த

$$\frac{P}{\sin(BOC)} = \frac{Q}{\sin(AOC)} = \frac{R}{\sin(AOB)} \quad \ldots\ldots (8)$$

சமன்பாடுகள் (5), (6), (7) & (8) ஐ பிரதியிட

$$\frac{P}{\dfrac{\frac{2}{3}\triangle ABC \text{ ன் பரப்பு}}{(OB)(OC)}} = \frac{Q}{\dfrac{\frac{2}{3}\triangle ABC \text{ ன் பரப்பு}}{(OA)(OC)}} = \frac{R}{\dfrac{\frac{2}{3}\triangle ABC \text{ ன் பரப்பு}}{(OA)(OB)}}$$

$$\frac{P}{(OB)(OC)} = \frac{Q}{(OA)(OC)} = \frac{R}{(OA)(OB)}$$

இருபுறமும் $(OA)(OB)(OC)$ ஆல் பெருக்க.

$$\frac{P}{OA} = \frac{Q}{OB} = \frac{R}{OC}$$

$$\Rightarrow P : Q : R = OA : OB : OC$$

என நிறுவப்பட்டது.

UNIT-2

இணைவிசைகள் மற்றும் திருப்புத்திறன்

ஒத்த இணைவிசைகள்:-

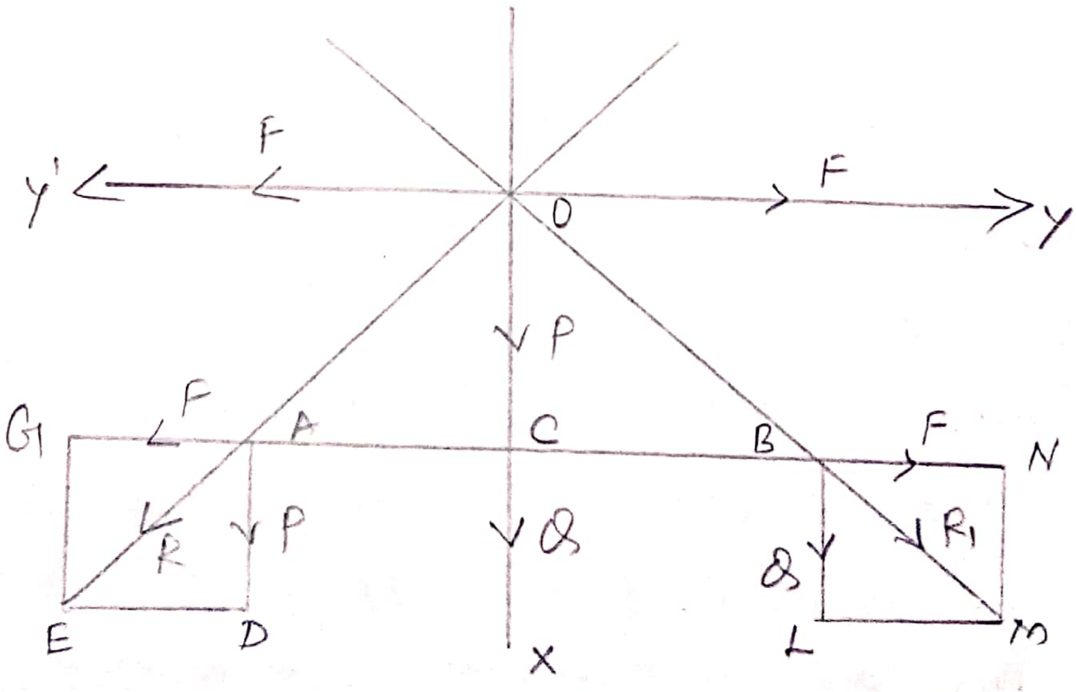
இரு இணைவிசைகள் ஒரே திசையில் செயல்பட்டால் அவை ஒத்த இணைவிசைகள் என்கிறோம்.

எதிர் இணை விசைகள்:-

விசைகள் ஒவ்வொன்றும் எதிர் திசையில் இருந்தால் அவை எதிர் இணை விசைகள் என்கிறோம்.

(1) இரு ஒத்த இணைவிசைகள் ஒரு கட்டிறுக்க பொருளின் மீது செயல்பட்டால் அவற்றின் விளைவு விசையைக் காணுதல்.

Solution:-



ஒரு கட்டிறுக்க பொருளின் இரு புள்ளிகள் A, B வழியே இரு ஒத்த இணைவிசைகள் P என்பது AD வழியாகவும் Q என்பது BL வழியாகவும் செயற்படுகிறது. இதனால் பொருளில் எந்த மாற்றமும் இல்லை.

புள்ளி A-யில் செயல்படும் விசை P, F இவற்றின் விளைவு விசை R, AE வழியாகச் செயற்படுகிறது.

புள்ளி B-யில் செயல்படும் விசை Q, F இவற்றின் விளைவு விசை R_1, BM வழியாகச் செயல்படுகிறது. இவ்விரு விளைவு விசைகள் செயல்படும் கோடுகளின் நீட்சி O-இல் சந்திக்கிறது.

O-இல் விசை R-ன் பிரிப்புகள் P, F என்பவை OX, OY' வழியாகச் செயல்படுகிறது.

இதைப்போலவே விளைவு விசை R_1-ன் பிரிப்புகள் Q, F என்பவை OX, OY வழியாகச் செயல்படுகிறது.

தற்போது புள்ளி O-இல் OY', OY வழியாகச் செயல்படும் விசை F என்பவை ஒன்றையொன்று சமன் செய்யும்.

தற்போது OX வழியாகச் செயல்படும் விசைகள் P, Q மட்டுமே உள்ளது. இவற்றின் விளைவு விசை P+Q. OX வழியாக விசைகள் P, Q-க்கு செயல்படும் திசைகளுக்கு இணையாக உள்ளது. இதிலிருந்து இரு ஒத்த இணை விசைகளின் விளைவு அவற்றின் கூடுதலாகும். ஒத்த இணை விசைகள் விளைவு விசைகள் செயல்படும் திசையிலேயே செயல்படும்.

தொகுபயன் விசை செயல்படும் புள்ளி காணுதல்:-

OX என்பது AB-ஐ C-ல் சந்திக்கிறது. இங்கு ΔOAC, ΔEAD என்ற இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை.

எனவே,

$$\frac{OC}{AD} = \frac{AC}{ED}$$

$$\Rightarrow \frac{OC}{P} = \frac{AC}{F}$$

$$\Rightarrow F \cdot OC = P \cdot AC \longrightarrow (1)$$

ΔOCB, ΔBLM ஆகியவை வடிவொத்தவை.

எனவே, $$\frac{OC}{BL} = \frac{BC}{LM}$$

$$\frac{OC}{Q} = \frac{BC}{F}$$

$$\Rightarrow F \cdot OC = Q \cdot BC \longrightarrow (2)$$

(1), (2) லிருந்து

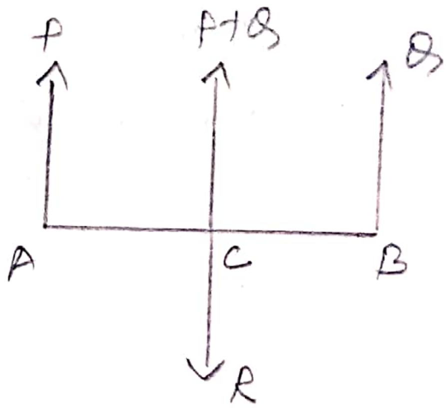
$$P \cdot AC = Q \cdot CB$$

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$$

(2) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது செயல்படும் எதிர் இணை விசைகள் செயல்பட்டால் அவற்றின் தொகுபயன் விசையைக் காணுதல்.

(3) மூன்று ஒருதள விசைகள் சமநிலையில் இருப்பதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க. (அ) மூன்று இணைவிசைகள் சமநிலையில் உள்ளன எனில் ஒவ்வொன்றும் மற்ற இரண்டின் இடைப்பட்ட தூரத்திற்கு நேர்த்தகவில் (அ) நேர்த்தகவில் இருக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு:-



ஒரே தளத்தில் விசைகள் P, Q, R சமநிலையில் உள்ளது என்க. இவ்விசைகள் செயல்படும் திசைகளை ஒரு கோடு AB C-ல் சந்திக்கிறது.

மூன்று விசைகளும் ஒரே திசையில் செயற்பட்டால் சமநிலை ஏற்படாது. எனவே ஏதேனும் இரு விசைகள் ஒத்த இணை விசையாகவும் மற்றது இவ்விசைகளுக்கு இணையாகவும் செயல்படும்.

விசைகள் P, Q இவற்றின் விளைவு விசை P+Q என்பது விசை P மற்றும் Q செயல்படும் திசைக்கு இணையாக உள்ளது. P+Q என்பது விசை R-க்கு சமமாகவும் எதிராகவும் செயற்பட்டால் தான் சமநிலையில் இருக்க முடியும்.

எனவே, $R = P+Q$ மற்றும் P+Q, C- வழியே செயல்படும் கோட்டிற்கு எதிர்திசையில் செயற்படும்.

எனவே,

P, Q-ன் விளைவு விசை செயற்படும் புள்ளி

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC}$$

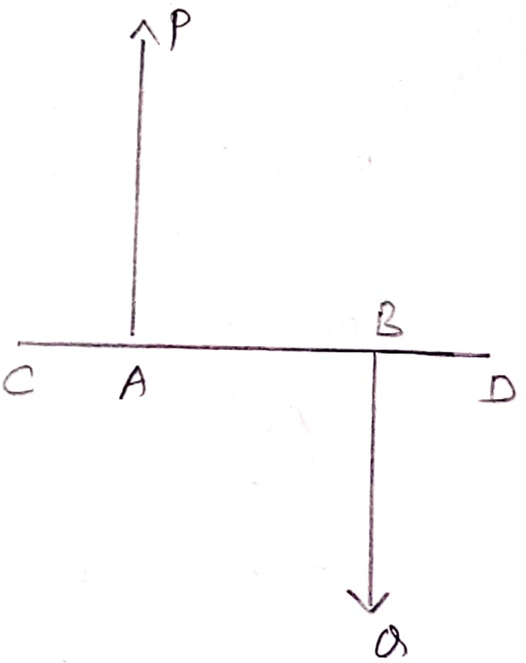
$$\Rightarrow \frac{P+Q}{CB+AC}$$

$$\frac{R}{AB}$$

எனவே, மூன்று இணைவிசைகள் சமநிலையில் இருந்தால் அவை ஒவ்வொன்றும் மற்ற இரு விசைகள் ஏற்படும் கோணத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்கும்.

4. இரு இணைவிசைகள் P மற்றும் Q ஒரு கோலின் A, B என்ற புள்ளிகளில் செயல்படுகிறது. இவற்றை இடமாற்றினால் விசைகளின் மையம் AB வழியே $\left[\frac{P+Q}{P-Q}\right]$ AB அளவு நகரும் என நிறுவுக.

Proof :-

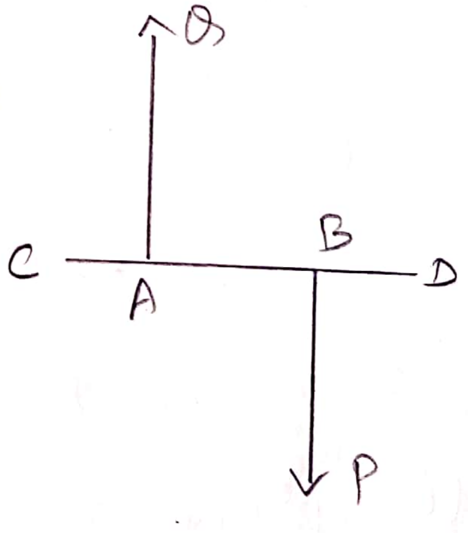


A, B -யில் செயல்படும் இணை விசைகளின் விளைவு விசை செயல்படும் புள்ளி C என்க.

எனவே

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$$

$$P \cdot AC = Q \cdot CB \longrightarrow (1)$$



விசைகளை இடமாற்றினால் விளைவு விசை செயல்படும் புள்ளி D என்க.

$$\frac{BD}{AD} = \frac{Q}{P}$$

$$P(BD) = Q(AD)$$

$$\Rightarrow P(AD - AB) = Q(AB + BD)$$

$$\Rightarrow P(AD) - Q(BD) = (P+Q)AB$$

$$\Rightarrow P(CD - CA) - Q(CD - CB) = (P+Q)AB$$

$$\Rightarrow CD(P-Q) - PCA + QCB = (P+Q)AB \longrightarrow (2)$$

சமன்பாடு (1)-யை (2)-ல் பிரதியிட

$$CD(P-Q) - QCB + QCB = (P+Q)AB$$

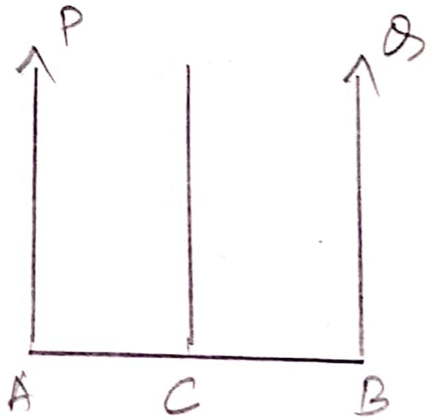
$$CD(P-Q) = (P+Q)AB$$

$$\therefore CD = \left[\frac{P+Q}{P-Q}\right] AB$$ எனப் நிறுவப்பட்டது.

5. இரு ஒரு போக்கு இணை விசைகள் P மற்றும் Q, A, B என்ற புள்ளியில் செயல்படுகிறது. இப்பொழுது P மற்றும் Q-ன் நிலைகளை மாற்றிய போதும் விளைவு விசையின் நிலை மாறவில்லை எனில் $P = Q$ என நிறுவுக.

தீர்வு :-

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$$



$$P(AC) = Q(CB) \longrightarrow (1)$$

$$Q(AC) = P(CB) \longrightarrow (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{Q}{P}$$

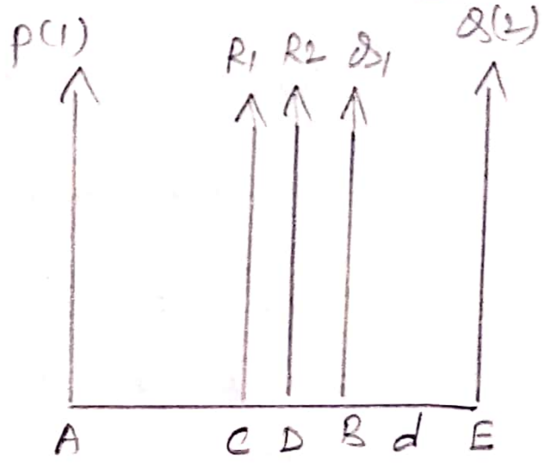
$$\Rightarrow P^2 = Q^2$$

$\therefore P = Q$ என நிறுவப்பட்டது.

6. P மற்றும் Q என்ற ஒரு போக்கு இணை விசைகள் முறையே திசைகளில் A, B என்ற இரு புள்ளிகளில் செயல்படுகின்றன. Q என்ற விசையை தன் திசைக்கு இணையாகவே d அளவு தூரம் நகர்த்தப்படுமானால் அவற்றின் விளைவு விசை

$\dfrac{Qd}{P+Q}$ அளவு தூரம் நகரும் என நிறுவுக.

Proof :-



A, B-யில் செயற்படும் ஒரு போக்கு இணை விசைகள் P, Q என்க.

இவற்றின் விளைவு விசை

$R_1 = P+Q.$

இவற்றிலிருந்து அவற்றின் விளைவு விசை செயற்படும் புள்ளி

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$$

$$P(AC) = Q(CB) \longrightarrow (1)$$

இப்பொழுது Q என்ற விசையை அதே திசையில் d தூரத்தில் அதன் விளைவு விசையை R_2 என்க.

விளைவு விசை செயற்படும் புள்ளி d என்க.

$$\frac{AD}{DE} = \frac{Q}{P}$$

$$P(AD) = Q(DE)$$

$$P(AC+CD) = Q(CE-CD)$$

$$(P+Q)\,CD = Q(CE) - P(AC)$$

$$= Q(CE) - Q(CB) \quad (\because (1)\text{-ன்படி})$$

$$= Q(CE-CB)$$

$$(P+Q)\,CD = Qd$$

$$\therefore CD = \frac{Qd}{P+Q}$$ என நிறுவப்பட்டது.

Moments (திருப்புத்திறன்)

O என்ற புள்ளியை பொருத்து

F என்ற விசையின் திருப்புத்திறன்

என்பது விசையின் அளவு விசை

செயல்படும் கோட்டிற்கும் அப்புள்ளிக்கும் உள்ள தூரம் இவற்றின்

பெருக்கற்பலன் ஆகும்.

எனவே, $M = r \times F$ ஆகும்.

Note:-

ஒரு விசையின் திருப்புத்திறன் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை

பொருத்து மிகை மதிப்புடையது எனில் அவ்விசை அப்புள்ளியைப்

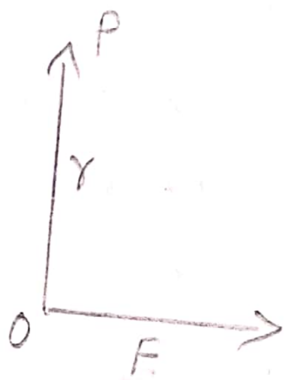
பொருத்து, கடிகார திசைக்கு எதிர்திசையில் செயல்படும்,

குறை மதிப்புடையது எனில் கடிகார திசையிலேயே செயல்படும்.

விசை செயல்படும் கோட்டிலேயே அப்புள்ளி இருந்தால்

விசையின் திருப்புத்திறன் பூஜ்யமாகும்.

Moments (திருப்புத்திறன்)



O என்ற புள்ளியை பொறுத்து F என்ற விசையின் திருப்புத்திறன் என்பது விசையின் அளவு விசை செயல்படும் கோட்டிற்கும் அப்புள்ளிக்கும் உள்ள தூரம் இவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.

எனவே, $M = r \times F$ ஆகும்.

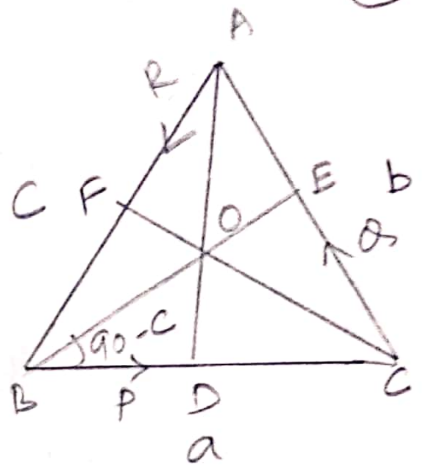
Note:-

ஒரு விசையின் திருப்புத்திறன் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை பொறுத்து மிகை மதிப்புடையது எனில் அவ்விசை அப்புள்ளியைப் பொறுத்து, கடிகார திசைக்கு எதிர் திசையில் செயல்படும். குறை மதிப்புடையது எனில் கடிகார திசையிலேயே செயல்படும். விசை செயல்படும் கோட்டிலேயே அப்புள்ளி இருந்தால் விசையின் திருப்புத்திறன் பூஜ்யமாகும்.

(7) முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் BC, CA, AB வழியே செயல்படும் விசைகள் P, Q, R இவற்றின் விளைவு விசை செங்கோட்டு சந்தி வழியே செல்கிறது எனில் Δ விரிகோண முக்கோணம் என நிறுவுக. மேலும் $\angle A = 120^\circ$, $B = C$ எனில் $Q + R = P\sqrt{3}$ என நிறுவுக.

Proof:-

புள்ளி O யைப் பொறுத்து விசைகளின் திருப்புத்திறன் $= POD + QOE + ROF \longrightarrow (1)$



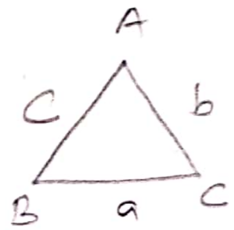
ΔOBD-ல்

$$\tan(90-C) = \frac{OD}{BD}$$

$$\cot C = \frac{OD}{BD}$$

$$OD = BD \cot C \longrightarrow (2)$$

ΔABD-ல்



$$\cos B = \frac{BD}{AB}$$

$$BD = AB \cos B$$

$$BD = c \cos B \longrightarrow (3)$$

சமன்பாடு (3)-ஐ (2)-ல் பிரதியிட

$$OD = c \cos B \cot C$$

$$= c \cos B \frac{\cos C}{\sin C}$$

$$OD = \frac{c}{\sin C} \cos B \cos C$$

முக்கோண பண்பின்படி

$\frac{c}{\sin C} = k$ என பிரதியிட

$$OD = k \cos B \cos C \longrightarrow (4)$$

|||ly $OE = k \cos A \cos C \longrightarrow (5)$

$$OF = k \cos A \cos B \longrightarrow (6)$$

சமன்பாடுகள் (4), (5), (6) களை (1)-ல் பிரதியிட

$$P(k \cos B \cos C) + Q(k \cos A \cos C) + R(k \cos A \cos B) = 0$$

$K \cos A \cos B \cos C$ ஆல் வகுக்க.

$$\frac{P}{\cos A} + \frac{Q}{\cos B} + \frac{R}{\cos C} = 0 \longrightarrow (7)$$

இச்சமன்பாட்டில் P, Q, R மிகை அளவு எனவே சமன்பாடு (7) ஏற்புடையது ஆகாது.

எனினும் ஒரு cos மதிப்பு குறைமதிப்புடையதாக இருக்க வேண்டும். எனவே ΔABC என்பது ஒரு விரிகோண முக்கோணம் ஆகும்.

$$\Rightarrow \frac{P}{\cos 120} + \frac{Q}{\cos 30} + \frac{R}{\cos 30} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\cos(180-60)} + \frac{Q}{\cos 30} + \frac{R}{\cos 30} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-P}{\cos 60} + \frac{Q}{\cos 30} + \frac{R}{\cos 30} = 0$$

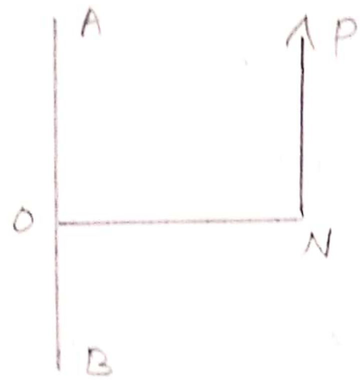
$$\Rightarrow \frac{-P}{1/2} + \frac{Q}{\sqrt{3}/2} + \frac{R}{\sqrt{3}/2} = 0$$

$$\Rightarrow -P + \frac{Q}{\sqrt{3}} + \frac{R}{\sqrt{3}} = 0$$

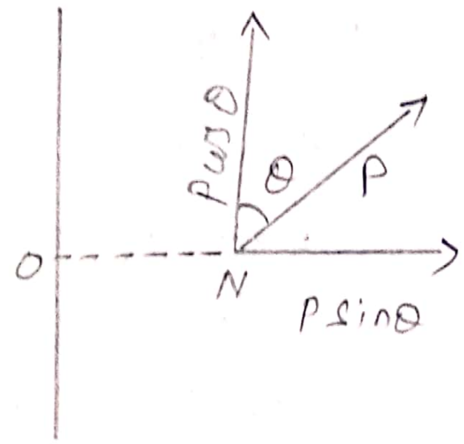
$$\Rightarrow \frac{Q+R}{\sqrt{3}} = P$$

$\therefore$ $Q + R = P\sqrt{3}$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

(8) ஒரு அச்சைப் பொறுத்து ஒரு விசையின் திருப்புத்திறன்



படம் (i)



படம் (ii)

நேர்க்கோடு AB-யைப் பொறுத்து விசை P-யின் திருப்புத்திறன் படம் (i)-ல் விசை P என்பது AB-க்கு செங்குத்தாக அமைந்துள்ளது என்க. AB-க்கும் விசை P-க்கும் உள்ள செங்குத்து தூரம் ON என்க.

எனவே AB-யைப் பொறுத்து விசை P-ன் திருப்புத்திறன் $= ON \cdot P$

படம் (ii)-ல் உள்ளது போல் விசை P, AB உடன் θ கோணச் சாய்வில் உள்ளது என்க.

AB மற்றும் AD-க்கு இணை மற்றும் செங்குத்து விசைக் கூறுகள் $P\cos\theta$ மற்றும் $P\sin\theta$ ஆகும்.

$P\cos\theta$ என்பது AB-க்கு இணையாக இருப்பதால் AB-யைப் பொறுத்து அதன் திருப்புத்திறன் பூஜ்ஜியமாகும்.

$P\sin\theta$ என்பது AB-யிலிருந்து ON செங்குத்து தூரத்தில் உள்ளது. எனவே AB-யைப் பொறுத்து இதன் திருப்புத்திறன் $= P\sin\theta \times ON$

Note:-

(i) ஒரு விசையானது எந்த கோட்டைப் பற்றி திருப்புத்திறன் காணப்படுகிறதோ அதற்கு இணையாக உள்ள விசையின் அதன் திருப்புத்திறன் பூஜ்ஜியமாகும்.

(ii) ஒரு விசையானது திருப்புத்திறன் காணப்படும் கோட்டை வெட்டினால் அவ்விசையின் திருப்புத்திறன் பூஜ்ஜியமாகும்.

ஒரு கோட்டைப் பொறுத்து வேரிக்னானின் தேற்றம்:

ஒரு பொருளில் செயல்படும் பல விசைகளின் தொகுதிக்கு விளைவு விசை இருந்தால் ஏதேனும் ஒரு கோட்டைப் பொறுத்து விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணிதக் கூடுதல் அக்கோட்டைப் பொறுத்து விளைவு விசையின் திருப்புத்திறனுக்குச் சமமாகும்.

(9). மூன்று விசைகள் P, Q, R என்க. ΔABC-ன் பக்கங்கள் BC, CA, AB வழியே செயல்படுகிறது. அதன் விளைவு விசை பின்வரும் புள்ளி வழியே சென்றால் கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றை நிறுவுக.

(i) O உள்வட்ட மையம் எனில் $P+Q+R=0$

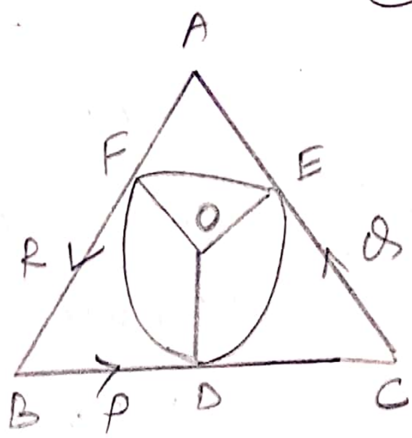
(ii) O சுற்றுவட்ட மையம் எனில்

$$P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$$

(iii) O நடுக்கோட்டுச் சந்தி எனில்

$$\frac{P}{\sin A} + \frac{Q}{\sin B} + \frac{R}{\sin C} = 0$$

Proof :(i)



புள்ளி O-வைப் பொறுத்து இணையு இரட்டை R'-ன் திருப்புத்திறன் = 0

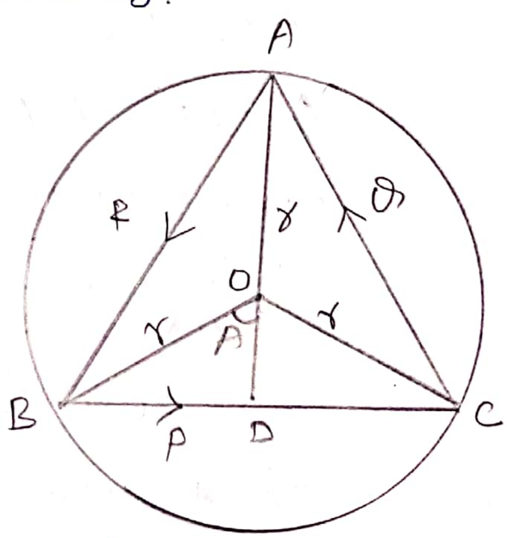
$$POD + QOE + ROF = 0$$

$$Pr + Qr + Rr = 0$$

$$(P+Q+R)r = 0$$

$\therefore$ $P+Q+R = 0$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

Proof (ii):-



சுற்றுவட்டத்தின் ஆரம் r என்க. P, Q, R-ன் சுற்றுவட்ட மையம் O வழியாகச் செல்கிறது. எனவே O-வைப் பொறுத்து இணையு இரட்டை R'-ன் திருப்புத்திறன் = 0

எனவே,

$$POD + QOE + ROF = 0 \longrightarrow (1)$$

$\triangle OBD$-ல்

$$\cos A = \frac{OD}{OB}$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{OD}{r}$$

$$\Rightarrow OD = r\cos A \longrightarrow (2)$$

III^ly $OE = r\cos B \longrightarrow (3)$

$OF = r\cos C \longrightarrow (4)$

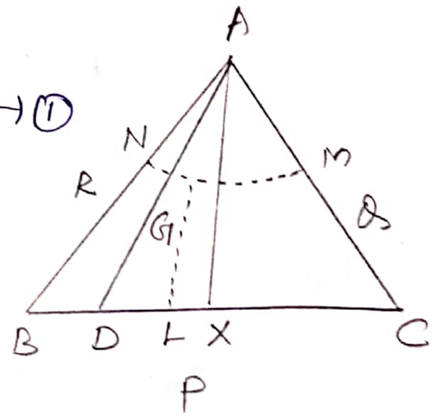
சமன்பாடுகள் (2), (3), (4) -ஐ (1) -ல் பிரதியிட

$P r\cos A + Q r\cos B + R r\cos C = 0$

$\Rightarrow (P\cos A + Q\cos B + R\cos C)\, r = 0$

$\therefore P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

Proof (iii):-



$PGL + QGM + RGN = 0 \longrightarrow (1)$

$AX \perp BC$ வரைக.

ΔGLD, ΔAXD என்பவை

வடிவொத்தவை.

$$\frac{GL}{AX} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow GL = \frac{1}{3} AX \longrightarrow (2)$$

முக்கோணத்தின் பரப்பு $\Delta = \frac{1}{2} BC \cdot AX$

$$\Rightarrow AX = \frac{2\Delta}{BC} \longrightarrow (3)$$

சமன்பாடு (3)-ஐ (2)-ல் பிரதியிட

$$GL = \frac{2\Delta}{3BC}$$

$$GL = \frac{2\Delta}{3a} \longrightarrow (4)$$

III^ly $GM = \dfrac{2\Delta}{3b} \longrightarrow (5)$

$$GN = \frac{2\Delta}{3c} \longrightarrow (6)$$

சமன்பாடு (4), (5), (6) -யை (1) -ல் பொருத்த

$$P\left[\frac{2\Delta}{3a}\right] + Q\left[\frac{2\Delta}{3b}\right] + R\left[\frac{2\Delta}{3c}\right] = 0$$

$$\frac{2\Delta}{3}\left\{\left[\frac{P}{a}\right] + \frac{Q}{b} + \frac{R}{c}\right\} = 0$$

$$\therefore \frac{P}{\sin A} + \frac{Q}{\sin B} + \frac{R}{\sin C} = 0 \qquad \because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 1$$

என நிறுவப்பட்டது.

சமன்பாடு (4), (5), (6) -யை (1) -ல் பிரதியிட

$$P\left[\frac{2\Delta}{3a}\right] + Q\left[\frac{2\Delta}{3b}\right] + R\left[\frac{2\Delta}{3c}\right] = 0$$

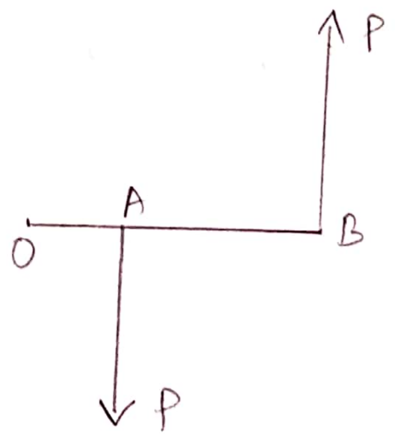
$$\frac{2\Delta}{3}\left\{\left[\frac{P}{a}\right] + \frac{Q}{b} + \frac{R}{c}\right\} = 0$$

$$\therefore \frac{P}{\sin A} + \frac{Q}{\sin B} + \frac{R}{\sin C} = 0 \qquad \because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 1$$

என நிரூபிக்கப்பட்டது.

Couples சுழலிணைகள் (அ) கோப்புகள்

ஒரே புள்ளியில் செயல்படாத இரு சம அளவுடைய எதிர்போக்கு இணைவிசைகள் ஒரு சுழலிணை அல்லது கோப்புகள் எனப்படும்.



சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் காணுதல் :-

A, B என்ற கோட்டில் O என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. A மற்றும் B வழியாக இருசம அளவுடைய எதிர்போக்கு இணைவிசைகள் செயல்படுகிறது. புள்ளி O-வைப் பொறுத்து விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித கூடுதல்

$$= P(OB) - P(OA)$$

$$= P(OB - OA)$$

$$= P(AB)$$

Note:-

(i) ஒரு சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் = இணையின் அளவு × இணைகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம்.

(ii) சுழலிணை அமையும் இணைகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் அந்த சுழலிணையின் புயம் எனப்படும்.

(iii) சுழலிணையின் இணை P அதன் புயம் p எனில் அந்த சுழலிணையை (P, p) எனக் குறிக்கலாம்.

(iv) ஒரு சுழலிணையின் அளவு எதிர்கடிகார திசையில் அமையும் பொழுது அதை மிகைச் சுழலிணை என்றும் கடிகார திசையில் அமையும் போது அதை குறைச் சுழலிணை என்றும் கூறலாம்.

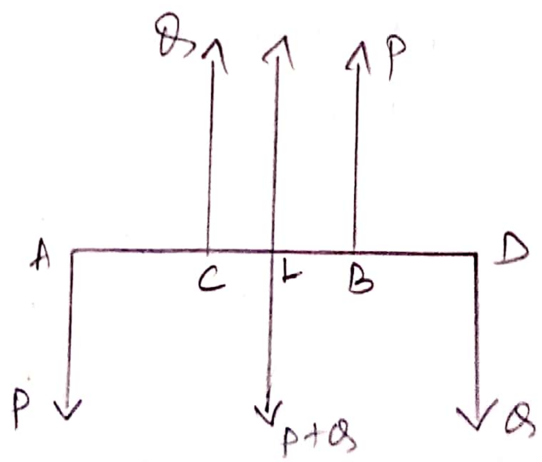
(1) ஒரு கட்டுறுப் பொருளின் இரு ஒரு தள சுழலிணைகள் அளவில் சமமாகவும் எதிர்திசையையும் கொண்டிருந்தால் அது ஒன்றையொன்று சமனிலைப்படுத்தும்.

Solution:-

Case (i):-

சுழலிணைகள் (P, p) (Q, q) ஒரு கட்டுறுப் பொருளின் பகுதியில் உள்ளவாறு செயல்படுகிறது.

AB = p, CD = q என்க.



சுழலிணைகள் அளவில் சமம் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே (P, p) = (Q, q)

A-யின் செயல்படும் விசை P, B-யின் செயல்படும் விசை Q ஆகியவை ஒரு போக்கு இணை விசைகள்.

இவற்றின் விளைவு விசை $= P+Q$

AD-ல் L-என்ற புள்ளியில்

$$\Rightarrow \frac{AL}{LD} = \frac{Q}{P}$$

$$\Rightarrow P(AL) = Q(LD) \longrightarrow (1)$$

$$\Rightarrow P(p) = Q(q)$$

$$\Rightarrow P(AB) = Q(CD) \longrightarrow (2)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow P(AB-AL) = Q(CD-LD)$$

$$\Rightarrow P(LB) = Q(CL)$$

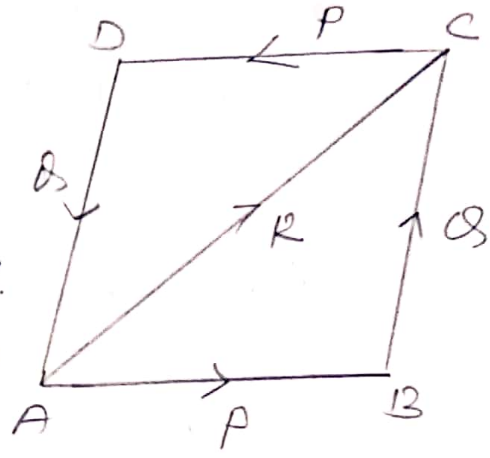
$$\Rightarrow \frac{Q}{P} = \frac{LB}{CL}$$

இதிலிருந்து C-ல் செயல்படும் விசைகள் Q மற்றும் B-யில் செயல்படும் விசை P ஆகியவை ஒருபோக்கு இணைவிசைகளாகும். இவற்றின் விளைவு விசை அதே திசையில் CB-யில்

$\frac{P}{Q} = \frac{CL}{LB}$ என்றவாறு செயல்படும்.

இறுதியாக L-ல் AD-க்கு செங்குத்தாக இருபுறமும் செயல்படும் விசைகள் ஒன்றையொன்று சமன்படுத்தும்.

Case (iii):-



விசைகள் P, Q என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்கின்றன. விசை P-யின் அளவுக்கேற்ப AB என்ற கோட்டையும் விசை Q-வின் அளவுக்கேற்ப AD என்ற கோட்டையும் அமைத்து இணைகரம் ABCD-யை பூர்த்தி செய்க.

இங்கு $Pp = Qq$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $\rightarrow (1)$

$$PAB = QAD \rightarrow (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{p}{AB} = \frac{q}{AD}$$

$$p(AD) = q(AB)$$

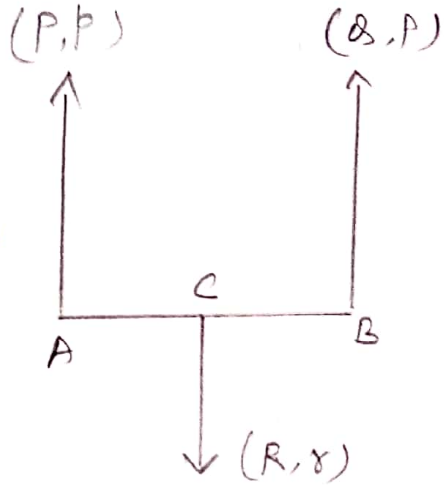
AB-யில் செயல்படும் விசை P, AD-யில் செயல்படும் விசை Q இவற்றின் விளைவு விசை இணைகரத்தின் AC என்ற மூலைவிட்டத்தால் குறிக்கப்படும். இதேபோல் CB, CD வழியே செயல்படும் விசைகளின் விளைவு விசை CA வழியாகச் செயல்படும்.

இவ்விரு விளைவு விசைகளும் சம அளவுடையது. நேர் எதிர் திசையைக் கொண்டுள்ளது.

$\therefore$ ஒன்றையொன்று சமநிலைப்படுத்தும்.

(2) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளில் செயல்படும் இரு ஒருதள சுழலிணைகள் அளவில் சமமாகவும் ஒரே திசையையும் கொண்டிருந்தால் அச்சுழலிணைகள் சமமாகும்.

Solution:-



(P, p) (Q, q) என்பவை ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் செயல்படும் ஒரு சுழலிணைகள் என்க. இவை அளவில் சமமாகவும் ஒரே திசையையும் கொண்டுள்ளன என்க.

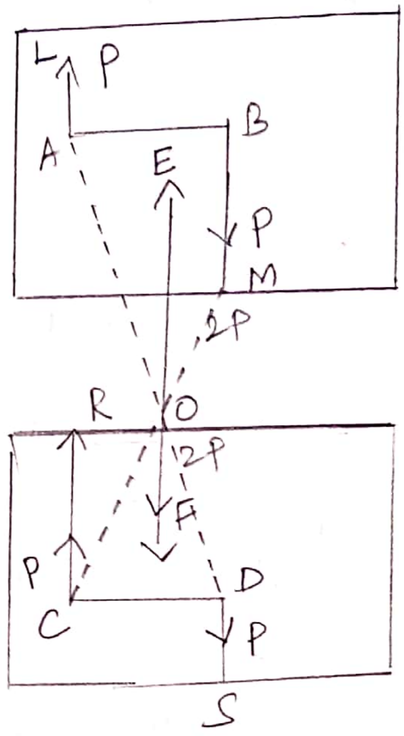
மற்றொரு சுழலிணை (R, r) சேர்க்கை இரு சுழலிணைகள் அமையும் தளத்தில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். இதன் திசை (P, p) (Q, q) க்கு எதிராக அமைவதாகக் கொள்வோம். (P, p) (R, r) இவை அளவில் சமமாகவும் எதிர்திசையையும் கொண்டிருப்பதால் முன்னிய தேற்றப்படி ஒன்றையொன்று சமநிலைப்படுத்தும்.

இதைப்போலவே (R, r) (Q, q) என்பவை அளவில் சமமாகவும் எதிர்திசையையும் கொண்டிருப்பதால் அவை ஒன்றையொன்று சமநிலைப்படுத்தும். அதாவது (P, p) (Q, q) ஆகிய சுழலிணைகளின் திருப்புகள் ஒரே மாதிரியாக இருப்பதால் இவ்விரு சுழலிணைகள் சமமாகும்.

(3) இணைத் தளங்களில் உள்ள சுழலிணைகள் ஒரு கட்டிறுக்க பொருளில் ஏதேனுமொரு தளத்தில் சுழலிணைகள் அளவையும் திசையையும் மாறாத நிலையில் அதற்கு இணையான தளத்தில் மாற்றலாம்.

Solution:-

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசையிணைகள்
விசை P-யை AL, BM என்ற படம் (1)
கோடுகளாலும் அதன் புயத்தை AB
என்ற கோட்டாலும் குறிப்போம்.



இத்தளத்திற்கு இணையான
மற்றொரு தளத்தில் CD என்ற படம் (2)
கோட்டை AB-க்கு இணையாக
எடுத்துக் கொள்வோம்.

இப்பொழுது AD மற்றும் BC
என்ற மூலைவிட்டங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியை O என்க.
O-வில் நேர் எதிர் திசைகளில் 2P என்ற இருவிசைகளை
செயற்படுத்துவோம்.

இதனால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசையிணையின் விளைவு மாறாது.
A-யில் செயல்படும் விசை P OF வழியே செயல்படும்
விசை 2P இவற்றின் விளைவு விசை $= 2P - P$
$= P$ ஆகும்.

விளைவு விசை D-யில்

$$\Rightarrow \frac{AD}{AO} = \frac{2P}{P} = 2$$

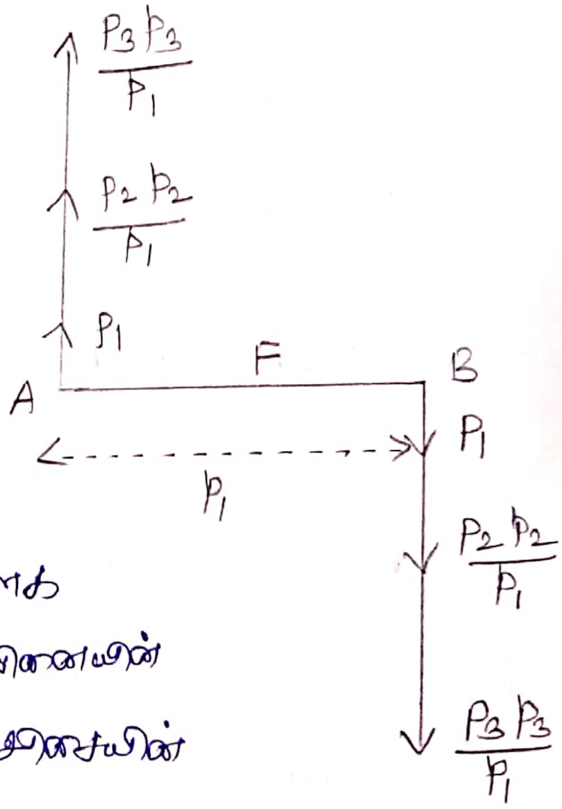
$\Rightarrow AD = 2AO$ ஆகும்.

அதாவது AD-ன் மையம் O ஆகும்.
A-யில் AL வழியே செயல்படும் விசை P, O-யில் OL-வழியே
செயல்படும் விசை 2P இவற்றின் விளைவு விசை DS வழியே
செயல்படும் விசை P ஆகும்.

இதேபோல் P-யை BM வழியே செயல்படும் P, DE வழியே செயல்படும் விசை 2P இவற்றின் விளைவு விசை CR வழியே செயல்படும் விசை P ஆகும். எனவே சுழலிணைகள் அமையும் தளத்தின் அதற்கு இணையான மற்றொரு தளத்தின் சுழலிணையாக மாற்றலாம்.

(4) ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் பல ஒருதள சுழலிணையின் விளைவு ஒரு சுழலிணை. மேலும் இவ்விளைவு சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் அந்த ஒருதள சுழலிணையின் திருப்புத்-திறன்களின் இயற்கணித கூடுதலுக்கு சமமாகும்.

Solution:-



$P_1 p_1$, $P_2 p_2$ என்பவை ஒரு பொருளின் செயல்படும் பல ஒருதள சுழலிணைகள் என்க.

முதல் சுழலிணையின் புயம் $p_1 = AB$ என்க.

இரண்டாவது சுழலிணையின் p_1 புயம் கொண்ட சுழலிணையாக மாற்றும் போது கிடைக்கும் சுழலிணையின் விசை F எனக் கொண்டால் விசையின் திருப்புத்திறன்

$$F \cdot AB = F \cdot p_1$$

இரண்டாவது சுழலிணை $P_2 p_2$ இவற்றின் திருப்புத்திறன்

$$F \cdot P_1 = P_2 p_2$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{P_2\, p_2}{p_1}$$

P_2, p_2 என்ற விசையினை $\left[\frac{P_2\, p_2}{p_1} \cdot p_1\right]$ என்றவாறு மாற்றலாம்.

இதைப்போலவே P_3, p_3 என்ற விசையினை $\left[\frac{P_3\, p_3}{p_1}, p_1\right]$ என்றவாறு மாற்றலாம்.

இவ்வாறு எல்லா விசைகளையும் $AB = p_1$ புயம் கொண்ட விசையாக மாற்றலாம்.

இப்போது p_1 புயத்தையும் $\left[P_1 + \frac{P_2 p_2}{p_1} + \frac{P_3 p_3}{p_1} + \cdots\right] p_1$ -ஐயும் கொண்ட விசையாகும்.

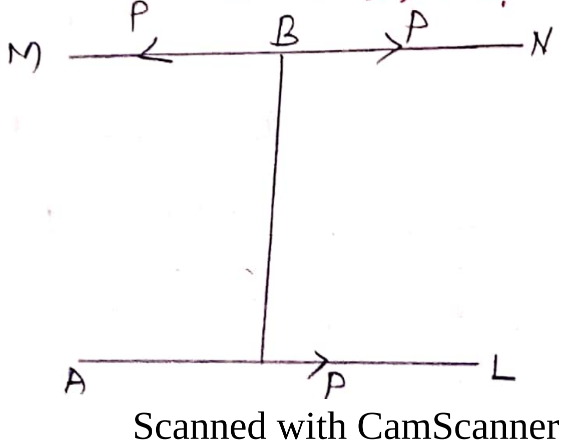
இந்த இணை $\left[p_1 + \frac{P_2 p_2}{p_1} + \frac{P_3 p_3}{p_1} + \cdots\right] p_1$

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \cdots =$$

கொடுக்கப்பட்ட விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித கூடுதலாகும்.

(5) ஒரு பொருளில் ஏதேனும் ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளியில் செயல்படக்கூடிய விசையை அதே புள்ளியில் மற்றொரு புள்ளியில் செயல்படும் அதே விசையாகவும் இணையாகவும் மாற்றலாம்.

Solution:-



கொடுத்துள்ள பொருளில் A என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. அதில் செயல்படும் விசை P.

நேர்க்கோடு AL வழியாகச் செல்கிறது. AL-க்கு இணையாக B என்ற புள்ளியில் MN என்ற நேர்க்கோடு வரைக. அந்நேர்க்கோட்டின் P என்ற புள்ளியில் BM, BN என்ற திசையில் இரு விசைகள் P, P-யை செயல்படுத்துக.

A-யில் AL வழியாகச் செயல்படும் விசை P, B-யில் BM வழியாகச் செயல்படும் விசை P ஆகியவை ஒரு திருப்பிணையை உருவாக்கும். இந்தத் திசை B-யில் BN வழியாக P என்ற விசை செயல்படுகிறது. இது கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைக்குச் சமமாகும்.

எனவே ஒரு விசையை திருப்பிணையாகவும் புயம் அளவுள்ள தூரத்தில் செயல்படக் கூடிய விசையாகவும் மாற்றலாம்.

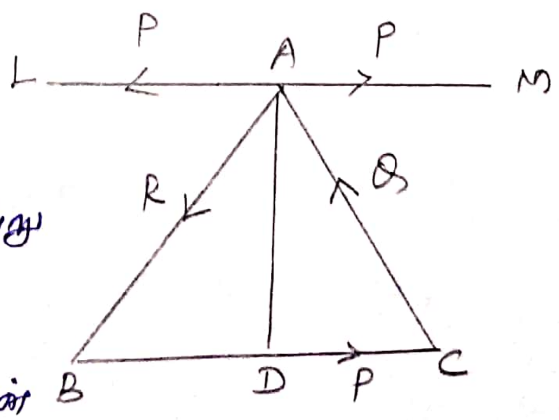
நேர்க்கோடு AL வழியாகச் செயல்படுகிறது. AL-க்கு இணையாக B என்ற புள்ளியில் MN என்ற நேர்க்கோடு வரைக. அந்நேர்க்கோட்டின் P என்ற புள்ளியில் BM, BN என்ற திசையில் இரு விசைகள் P, P-யை செயல்படுத்துக.

A-யில் AL வழியாகச் செயல்படும் விசை P, B-யில் BM வழியாகச் செயல்படும் விசை P ஆகியவை ஒரு இரட்டையை உருவாக்கும். இதைத் தவிர B-யில் BN வழியாக P என்ற விசை செயல்படுகிறது. இது கொடுக்கப்பட்டுள்ள விசைக்குச் சமமாகும்.

எனவே ஒரு விசையை இரட்டையாகவும் புயம் அளவுள்ள தூரத்தில் செயல்படக் கூடிய விசையாகவும் மாற்றலாம்.

(6) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது செயல்படும் மூன்று விசைகள் அளவிலும் திசையிலும் செயல்கோட்டின் ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் வழியாகக் குறிக்கப்பட்டால் அவ்விசைகள் ஒரு இரட்டைக்குச் சமமாகவும் அதன் இரட்டையின் திருப்புத்திறன் முக்கோணத்தின் பரப்பின் இரு மடங்காகும் என நிறுவுக.

Proof:-



ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது செயல்படும் மூன்று விசைகள் P, Q, R என்பவை அளவிலும் திசையிலும் $\triangle ABC$-ன் பக்கங்கள் BC, CA, AB வழியாக குறிக்கப்படுகின்றது. என்க.

A வழியாக BC-க்கு இணையாக LM என்ற கோட்டை வரைக. AD-யும் BC-யும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து. A-யில் AM, AL வழியாக விசைகள் P, P என்பனத் செயல்படுத்தவும். இந்த புதிய விசைகள் சமமாகவும் எதிர்-எதிராகவும் இருப்பதால் பொருளின் மீது எந்தவித மாற்றமும் இல்லை. இப்போது AM வழியாக P என்ற விசையும் AC வழியாக Q என்ற விசையும் AB வழியாக R என்ற விசையும் A-ல் செயல்படுகிறது. இவ்விசைகள் முழுவதும் ABC-ன் பக்கங்கள் வழியாக குறிக்கப்படும்.

விசைகளின் முக்கோண விதிப்படி இவை சமநிலையில் இருக்கும். இப்போது AL வழியாகச் செயல்படும் விசை P, BC வழியாகச் செயல்படும் விசை P ஆகியவை மட்டுமே மீதம் உள்ளது. இவைகள் சமமாகவும் எதிரெதிராகவும் இருப்பதால் ஒரு சுழலிணை ஆகும்.

இதன் திருப்புத்திறன் $= P \cdot AD$

$= BC \cdot AD$

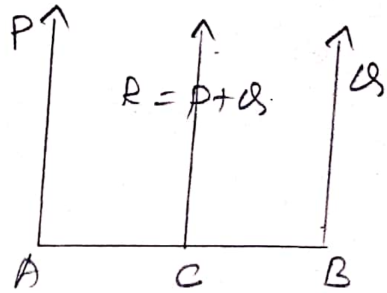
$= 2\left[\frac{1}{2} BC \cdot AD\right]$

$= 2\Delta ABC$ என நிறுவப்பட்டது.

7. P, Q என்பன ஒரு போக்கு இணை விசைகள் இந்த விசைகளுடன் திருப்புத்திறன் G உள்ளது. அதனுடன் ஒரு சுழலிணை இணைக்கப்படுகிறது எனில் இரு இணை விசைகளின் விளைவு விசை $\frac{G}{P+Q}$ தொலைவு நகரும் எனக் காட்டுக.

Proof:-

ஒரு போக்கு இணை விசைகள் P, Q இவற்றின் விளைவு விசை = P+Q. இந்த விசையுடன் G என்ற திருப்புத்திறன் உள்ள ஒரு சுழலிணை இணைக்கப்படுகிறது.



அப்போது விசை P+Q திருப்புத்திறன் G உள்ள சுழலிணை ஆகியவை ஒரே ஒரு சமஇணை விசை P+Q என குறைக்கப்பட்டு அவ்விசை செயல்படும் புள்ளி நகர்ந்த தூரம் = சுழலிணையின் திருப்புத்திறன்.

எனவே கொடுக்குள்ள விசை $= \frac{G}{P+Q}$

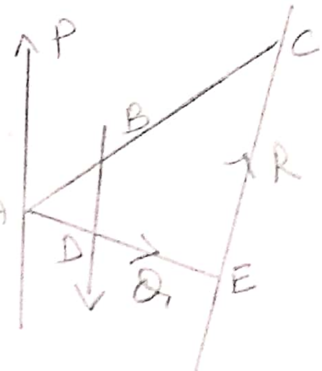
எனவே விளைவு விசை $\frac{G}{P+Q}$ அளவு நகர்ந்திருக்கும்.

UNIT-3

Equilibrium of three forces acting on rigid body :- ஒரு கட்டிறுக்க பொருளின் மீது செயல்படும் ஒரு தள விசைகள்

(1) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயல்படும் மூன்று விசைகள் சமநிலையில் இருந்தால் அவைகள் ஒருதள விசைகளாகும்.

Proof :-



P, Q, R என்பவை சமநிலையிலுள்ள விசைகள் என்க. P என்ற விசை செயல்படும் கோட்டின் மீது A என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க.

AB என்ற கோடு R என்ற விசைக்கு இணையாக இல்லாதவாறு D என்ற புள்ளியை Q என்ற விசைக்கோட்டின் மேல் எடுத்துக் கொள்க. P, Q, R சமநிலையில் இருப்பதால் AB என்ற கோட்டை பொறுத்து விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் கூடுதல் 0 (பூஜ்ஜியம்) ஆகும்.

எனவே AB ஐ பொறுத்து (விசை P-யின் திருப்புத்திறன் + Q-ன் திருப்புத்திறன் + R-ன் திருப்புத்திறன் = 0)

AB என்ற கோடு விசை P யையும் விசை Q வையும் வெட்டுவதால் AB-யை பொறுத்து P-ன் திருப்புத்திறனும் AB-யை பொறுத்து Q-ன் திருப்புத்திறனும் 0 ஆகும்.

எனவே AB-யை பொறுத்து R-ன் திருப்புத்திறனும்

O ஆகும். எனவே AB என்ற கோடு R-க்கு இணையாக இருக்கும். ஆனால் AB என்ற புள்ளிகளை R-க்கு இணையாக இல்லாதவாறு எடுத்துக்கொள்கிறோம். ஆதலால் R என்பது AB-யை வெட்டும். அந்தப் புள்ளியை C என்க. இதேபோல் B என்ற புள்ளியை Q-வின் மீது AB என்ற கோடு R-க்கு இணையாக இல்லாதவாறு எடுத்துக்கொண்டோம் எனில் AD என்ற கோடு R-யை வெட்டும். அது வெட்டும் புள்ளி E என்க. BC என்ற கோடும் DE என்ற கோடும் A-யில் வெட்டுவதால் BD என்ற கோடும் CE என்ற கோடும் ஒரே தளத்தில் அமையும். அதாவது A என்ற புள்ளி Q-வும் R-வும் உருவாக்கும் தளத்தில் அமையும். மேலும் A என்பது B-யின் மேலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாதலால் P-யில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் Q, R ல் அமையும் தளத்திலேயே இருக்கும். அதாவது இணைகள் P, Q, R ஒரே தளத்தில் அமையும்.

சமநிலைக்கான நிபந்தனைகள் :-

(i) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயல்படும் விசைகள் சமநிலையிலிருந்து இணையற்றதாக இருப்பதால் லாமியின் தேற்றம் அல்லது விசைகளின் முக்கோண விதி அல்லது விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசையில் கூறுகளாகலாம்.

(ii) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளில் மூன்று விசைகள் செயல்பட்டு சமநிலையிலிருந்து அவை இணையாக

இருப்பதால் ஒவ்வொரு விசையும் மற்ற இரு விசைகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்திற்கு ஏற்ற பொருத்தத்தில் இருக்கும் என்ற நிபந்தனையை பயன்படுத்தலாம்.

(iii) படத்தை வரையும் போது விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாகவோ அல்லது அவ்விசைகள் ஒரு புள்ளி வழியாகச் செல்வதாகவோ வரையலாம்.

கணக்கினை தீர்க்கும் முறைகள்:-

(1) முதலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனைக்கு ஏற்ப படத்தை வரைந்து கொள்ளவும்.

(2). படத்தில் விசைகளை குறிக்கும் போது கீழ்கண்ட-வற்றை நினைவு கொள்ளவும்.

(i) பொருளின் எடை செங்குத்தாக கீழ்நோக்கி புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே செயல்பட வேண்டும்.

(ii) ஒரு பொருளை (கம்பி, கட்டை, சுவர்) வழுவழுப்பான ஒரு பரப்பின் மேல் (சுவர்) சாய்த்து வைக்கப்பட்டால் பொருளின் எதிர் அழுத்தம் பொருளும் பரப்பும் தொடும் புள்ளியில் படத்திற்கு செங்குத்தாகச் செயல்படும்.

(iii) ஒரு கம்பி வழுவழுப்பான கட்டையின் மேல் இருந்தால் கட்டையின் எதிர்விசை கட்டையின் கம்பியின் தொடும் புள்ளி வழியாக கம்பிக்குச் செங்குத்தாக செயல்படும்.

(iv) ஒரு சீரான நாணின் நீளம் முழுவதிலும் நாணின் இழுவை சமமாக இருக்கும். ஒரு வழுவழுப்பான கட்டை அல்லது கம்பியின் வழியாக நாண் சென்றால் நாணின் இழுவை மாறாது. கம்பியானது சொரசொரப்பானது எனில் கம்பியின் இருபுறமும் நாணின் இழுவை மாறும்.

(v) இரு சம விசைகளின் விளைவு விசை அச்சம விசைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தை இருசமக் கூறாக்கும்.

(3). கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று விசைகள் இணையற்றது எனில் அவை மூன்றும் ஒரு புள்ளி வழியாகச் செல்லும். மூன்று விசைகள் சமநிலையில் உள்ளது எனில் இரு விசைகள் O என்ற புள்ளி வழியே சென்றால் அவற்றின் மூன்றாவது விசையும் O என்னும் புள்ளி வழியேச் செல்லும்.

(2) திரிகோண அமைப்புகள் (அல்லது)

A, B, C என்ற முக்கோணத்தில் BC என்ற அடிப்பக்கத்தில் D என்ற புள்ளி $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$ என்றவாறு உள்ளது.
$\angle ADC = \theta$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle DAC = \beta$ எனில்

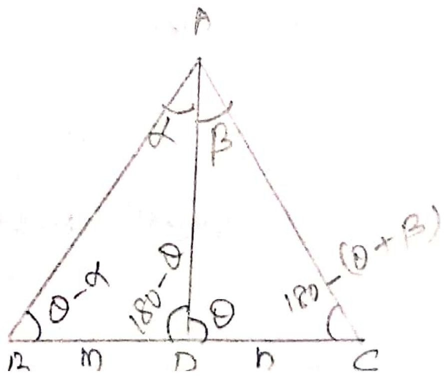
(i) $(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta$ எனவும்

(ii) $(m+n)\cot\theta = n\cot B - m\cot C$ எனவும் நிறுவுக.

Proof (i):-

$$\frac{m}{n} = \frac{BD}{DC}$$

$$= \frac{BD}{DA} \cdot \frac{DA}{DC}$$



$$= \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)} \cdot \frac{\sin[180-(\theta+\beta)]}{\sin\beta}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)} \cdot \frac{\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\sin\alpha(\sin\theta\cos\beta+\cos\theta\sin\beta)}{\sin\beta(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha)}$$

$\sin\theta\ \sin\alpha\ \sin\beta$ ஆல் வகுக்க.

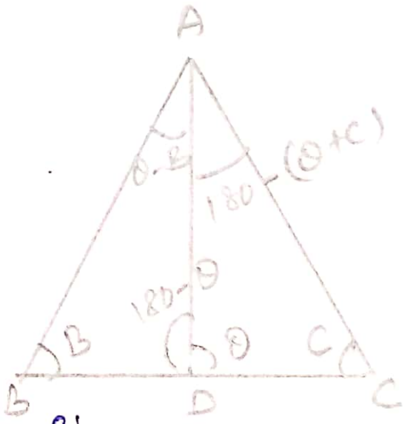
$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\cot\beta+\cot\theta}{\cot\alpha-\cot\theta}$$

$$\Rightarrow m\cot\alpha - m\cot\theta = n\cot\beta + n\cot\theta$$

$$\Rightarrow m\cot\alpha - n\cot\beta = m\cot\theta + n\cot\theta$$

$$\Rightarrow (m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta$$ என நிறுவப்பட்டது.

Proof (ii) :-



$$\frac{m}{n} = \frac{BD}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{BD}{DA} \cdot \frac{DA}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\sin(\theta-B)}{\sin B} \cdot \frac{\sin C}{\sin[180-(\theta+C)]}$$

$$= \frac{\sin(\theta-B)}{\sin B} \cdot \frac{\sin C}{\sin(\theta+C)}$$

$$= \frac{\sin C(\sin\theta\cos B-\cos\theta\sin B)}{\sin B(\sin\theta\cos C+\cos\theta\sin C)}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\sin C \sin\theta \cos B - \sin C \cos\theta \sin B}{\sin B \cos C \sin\theta + \sin B \cos\theta \sin C}$$

$\sin\theta \sin B \sin C$ ஆல் வகுக்க

$$\frac{m}{n} = \frac{\cot B - \cot\theta}{\cot C + \cot\theta}$$

$$m(\cot C + \cot\theta) = n(\cot B - \cot\theta)$$

$$m\cot C + m\cot\theta = n\cot B - n\cot\theta$$

$$m\cot\theta + n\cot\theta = n\cot B - m\cot C$$

$\therefore (m+n)\cot\theta = n\cot B - m\cot C$ என

நிரூபிக்கப்பட்டது.

(3) a நீளமுள்ள ஒரு சீரான கம்பி ஒரு செங்குத்தான சுவற்றின் மீது சாய்த்து வைக்கப்படும் போது அதன் மறுமுனை l நீளமுள்ள கயிற்றினால் கட்டப்பட்டு அக்கயிற்றின் மற்றொரு புள்ளியில் இக்கம்பியானது சுவற்றில் தொங்குமாறு கட்டப்பட்டுள்ளது. கம்பியும் சுவற்றுக்கும் இடையேயுள்ள கோணம் θ எனில் $\cos^2\theta = \frac{l^2-a^2}{3a^2}$ என நிரூபிக்க. மேலும் இவ்வமைப்பு சமநிலையில் இருக்க a, l-ன் எல்லைகளையும் காண்க.

தீர்வு:-

$AB = a$ என்பது கம்பி.

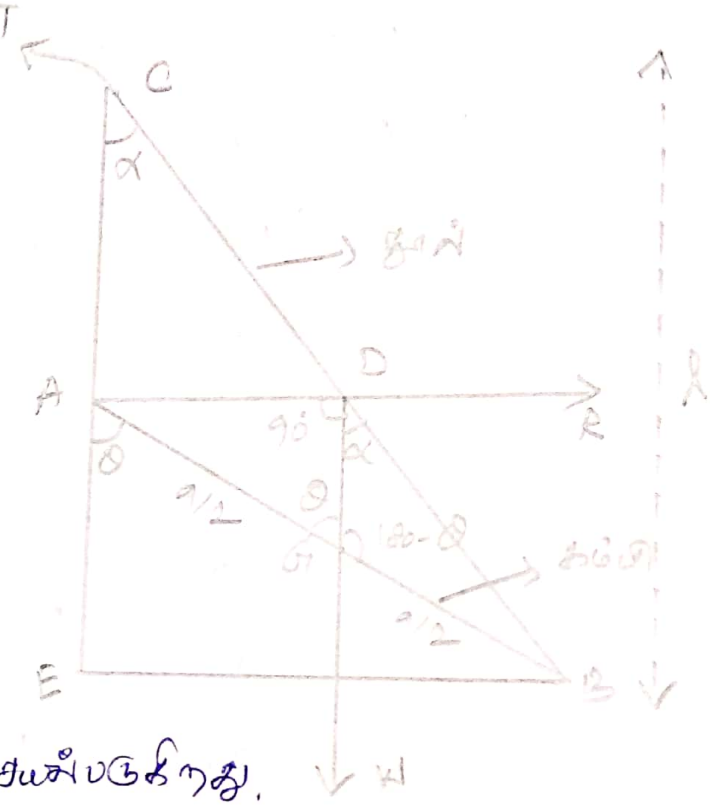
G என்பது புவியீர்ப்பு மையம்.

BC = l என்பது கயிறு.

இப்பொழுது கம்பியின் மேல் செயல்படும் விசைகள்

(i) அதன் எடை W, G வழியாக செங்குத்தாக கீழ்நோக்கி செயல்படுகிறது.

(ii) எதிர்விசை A வழியே சுவற்றுக்கு செங்குத்தாக செயல்படுகிறது.



(iii) BC வழியே நூலின் இழுவிசை T செயல்படுகிறது.

இம்மூன்று விசைகளும் இணை விசைகள் இல்லாததால் அவை மூன்றும் ஒரே புள்ளியில் வெட்ட வேண்டும். அப்புள்ளியை D என்க. θ என்பது கம்பிக்கும் சுவற்றுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம். நூலிற்கும் சுவற்றிற்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தை α எனக் கொள்க.

$\angle ECB = \angle CDB = \alpha$ எனவும்

$\angle EAB = \angle AGD = \theta$ எனவும்

$\angle DGB = 180-\theta$ எனவும் கொள்க.

முதல் திரிகோண அமைப்பாட்டை ΔADB-யில் பயன்படுத்த,

$$(AG+GB)\cot(180-\theta) = AG\cot 90 - GB\cot\alpha$$

$$-\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)\cot\theta = AG(0) - \frac{a}{2}\cot\alpha$$

$$\Rightarrow -a\cot\theta = -\frac{a}{2}\cot\alpha$$

Scanned with CamScanner

$$2\cot\theta = \cot\alpha \longrightarrow (1)$$

$\triangle ABE$ யில்

$$\sin\theta = \frac{BE}{AB}$$

$$\sin\theta = \frac{BE}{a}$$

$$\Rightarrow BE = a\sin\theta \longrightarrow (2)$$

$\triangle EBC$ - ல்

$$\sin\alpha = \frac{BE}{BC}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{BE}{l}$$

$$BE = l\sin\alpha \longrightarrow (3)$$

சமன்பாடு (2), (3) லிருந்து

$$a\sin\theta = l\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{l}{a}\sin\alpha \longrightarrow (4)$$

சமன்பாடு (4) - ஐ (1) - ல் பிரதியிட

$$(2) \Rightarrow \frac{2\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\theta}{l/a\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{2a\cos\theta}{l} = \cos\alpha$$

$$\Rightarrow 2a\cos\theta = l\cos\alpha \longrightarrow (5)$$

சமன்பாடு (5) - ஐ இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$$4a^2\cos^2\theta = l^2\cos^2\alpha$$

$$= l^2(1-\sin^2\alpha)$$

$$= l^2\left[1-\frac{a^2\sin^2\theta}{l^2}\right]$$

$$4a^2\cos^2\theta = l^2 - a^2\sin^2\theta$$

$$3a^2\cos^2\theta + a^2\cos^2\theta = l^2 - a^2\sin^2\theta$$

$$3a^2\cos^2\theta = l^2 - a^2\sin^2\theta - a^2\cos^2\theta$$

$$3a^2\cos^2\theta = l^2 - a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$3a^2\cos^2\theta = l^2 - a^2(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos^2\theta = \frac{l^2-a^2}{3a^2}}$$ என நிறுவப்பட்டது.

மேலும்,

$$\frac{l^2-a^2}{3a^2} > 0$$

$$l^2 - a^2 > 0$$

$$l^2 > a^2$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{a^2}{l^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{l^2} < 1 \longrightarrow (6)$$

$$\frac{l^2-a^2}{3a^2} < 1$$

$$l^2 - a^2 < 3a^2$$

$$l^2 < 3a^2 + a^2$$

$$l^2 < 4a^2$$

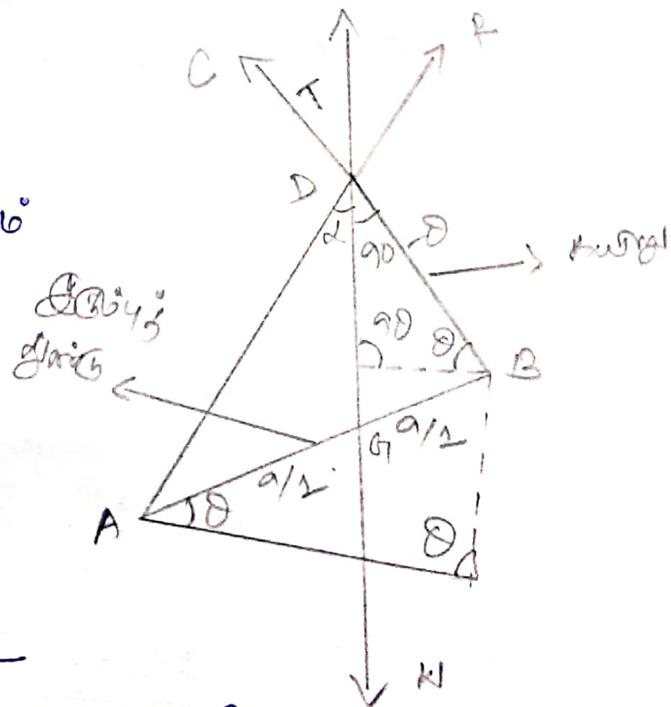
$$\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{a^2}{l^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{a^2}{l^2} < 1 \qquad (\because (6) \text{ வரை})$$

$$\frac{1}{2} < \frac{a}{l} < 1$$

இதுவே a, l-ன் எல்லைகளாகும்.

(4) W எடையுள்ள இரும்புக் கம்பியின் கீழ்முனை ஒரு இடத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. மற்றொரு முனை கயிற்றால் இணைக்கப்பட்டு அதன் மறுமுனை செங்குத்துத் தாக்கில் கட்டப்பட்டுள்ளது. கயிறு மற்றும் இரும்புத்துண்டு கிடைக்கோட்டுடன் θ கோணத்தை சாய்வாக உள்ளது எனில் கீழ்முனை அதன் எதிர்தாக்கம் $\frac{W}{4}\sqrt{8+\csc^2\theta}$ என நிறுவுக.



தீர்வு:-

$AB = a$ நீளமும் W எடையும் உடைய ஒரு இரும்புத்துண்டு. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G.

BC என்பது கயிறாகும்.

அமைப்பின் செயல்படும் விசைகள்

(i) இரும்புத் துண்டின் எடை W என்பது G வழியே செங்குத்தாக கீழ்நோக்கி செயல்படும்.

(iii) கயிற்றின் இழுவிசை T என்பது DC வழியாகச் செயல்படுகிறது.

(iii) எதிர்த்தாக்கம் R என்பது AD வழியே செயல்படுகிறது.

இவ்வமைப்பு சமநிலையில் இருப்பதால் மூன்று

விசைகளும் ஒரே புள்ளி D வழியே செயல்படும்.

ΔADB-ல் கோட் திரிகோண வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்த,

$$(AG+GB)\cot(90-\theta) = AG\cot\alpha - GB\cot(90-\theta)$$

$$a\tan\theta = \frac{a}{2}\cot\alpha - \frac{a}{2}\tan\theta$$

$$2a\tan\theta = a\cot\alpha - a\tan\theta$$

$$2a\tan\theta + a\tan\theta = a\cot\alpha$$

$$3a\tan\theta = a\cot\alpha$$

$$\tan\theta = \frac{1}{3}\cot\alpha$$

$$\tan\theta = \frac{1}{3\tan\alpha} \rightarrow (1)$$

D-யில் லாமியின் தேற்றத்தை பயன்படுத்த

$$\frac{W}{\sin[90-(\theta-\alpha)]} = \frac{R}{\sin(90-\theta)}$$

$$\frac{W}{\cos(\theta-\alpha)} = \frac{R}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow R = \frac{W\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)}$$

$$\frac{W \cos\theta}{\cos\theta \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha}$$

$\cos\theta \cos\alpha$ ஆல் தொகுப் பகுப் வகுக்க

$$R = \frac{W \cos\theta / \cos\theta \cos\alpha}{\frac{\cos\theta \cos\alpha}{\cos\theta \cos\alpha} + \frac{\sin\theta \sin\alpha}{\cos\theta \cos\alpha}}$$

$$R = \frac{\frac{W}{\cos\alpha}}{1 + \tan\theta \tan\alpha} \longrightarrow (2)$$

சமன்பாடு (2) -ல் (1) -ஐ பிரதியிட

$$\Rightarrow R = \frac{W / \cos\alpha}{1 + \frac{1}{3\tan\alpha} \tan\alpha}$$

$$= \frac{W}{\cos\alpha} \times \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow R = \frac{3W}{4 \cos\alpha}$$

$$= \frac{3}{4} W \sec\alpha$$

$$\Rightarrow R = \frac{3}{4} W \sqrt{\sec^2\alpha}$$

$$= \frac{3}{4} W \sqrt{1 + \tan^2\alpha} \longrightarrow (3)$$

சமன்பாடு (3) -ல் (1) -ஐ பயன்படுத்த

$$R = \frac{3}{4} W \sqrt{1 + \frac{1}{9} \cot^2 \theta}$$

$$= \frac{3}{4} W \frac{\sqrt{9 + \cot^2 \theta}}{3}$$

$$= \frac{W}{4} \sqrt{9 + \cot^2 \theta}$$

$$= \frac{W}{4} \sqrt{8 + 1 + \cot^2 \theta}$$

$$\therefore \boxed{R = \frac{W}{4} \sqrt{8 + \operatorname{cosec}^2 \theta}}$$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

$$R = \frac{3}{4} W \sqrt{1 + \frac{1}{9}\cot^2\theta}$$

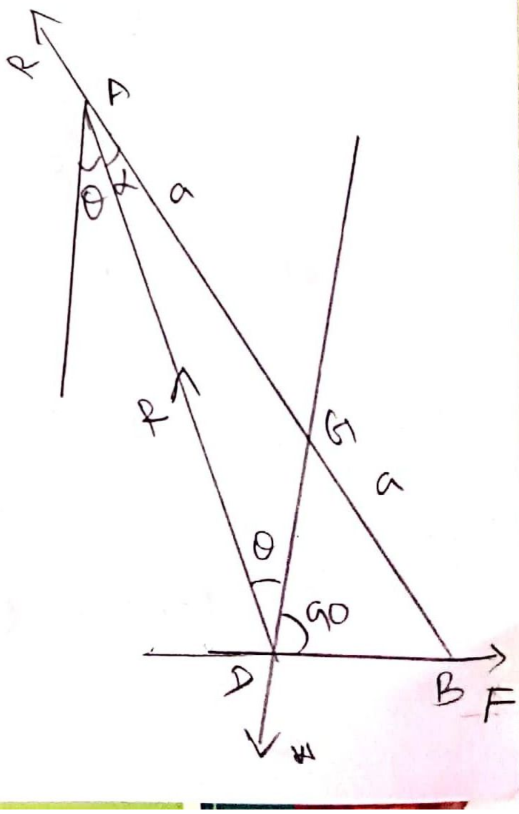
$$= \frac{3}{4} W \frac{\sqrt{9+\cot^2\theta}}{3}$$

$$= \frac{W}{4}\sqrt{9+\cot^2\theta}$$

$$= \frac{W}{4}\sqrt{8+1+\cot^2\theta} \qquad \because 1+\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$

$$\therefore \boxed{R = \frac{W}{4}\sqrt{8+\operatorname{cosec}^2\theta}}$$ என நிறுவப்பட்டது.

2a நீளமும் W எடையும் உள்ள ஒரு சீரான கம்பி AB செங்குத்துக் கோட்டுடன் α கோணத்தில் இருக்குமாறு புள்ளி B-யில் கிடைத்திசையில் செயல்படுமாறு விசை F-ல் நிறுத்தப்படுகிறது எனில் எதிர்தாக்கத்தின் அளவு, எதிர்தாக்கத்தின் செயல்படும் திசை இவற்றை காண்க. மேலும் $F = \frac{W}{2}\tan\alpha$ என நிறுவுக.



Proof :-

இவ்வமைப்பில் செயல்படும்

விசைகள்

கம்பியின் எடை W, G.

வழியாக செங்குத்தாக கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். கம்பியின் எதிர்தாக்கம் R. கிடைதிசை F.

Δ ABD-யின் முதல் திரிகோண வாய்பாட்டை பயன்படுத்த,

$$(AG+GB)\cot\alpha - AG\cot\theta - GB\cot 90$$

$$2a\cot\alpha = a\cot\theta - GB(0)$$

$$2a\cot\alpha = a\cot\theta$$

$$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{2}\cot\theta$$

$$\frac{1}{2}\tan\theta = \cot\alpha$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2}\cot\alpha$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2}\tan\alpha \longrightarrow (1)$$

D என்ற புள்ளியின் லாமியின் தேற்றத்தை பயன்படுத்த

$$\frac{W}{\sin(90+\theta)} = \frac{F}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin 90}$$

முதல் மற்றும் மூன்றாவதிலிருந்து

$$R = \frac{W\sin 90}{\cos\theta}$$

$$R = \frac{W}{\cos\theta}$$

$$R = W\sec\theta$$

$$= W\sqrt{\sec^2\theta}$$

$$= W\sqrt{1+\tan^2\theta} \longrightarrow (2)$$

இப்போது (1)-ஐ (2)-ல் பிரதியிட

$$R = W\sqrt{1+\frac{1}{4}\tan^2\alpha}$$

$$= W\sqrt{\frac{4+\tan^2\alpha}{4}}$$

எதிர் தாக்கத்தின் அளவு $= \frac{W}{2}\sqrt{4+\tan^2\alpha}$

முதல் மற்றும் இரண்டாவது சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$F = \frac{W\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$F = W\tan\theta \longrightarrow (3)$$

சமன்பாடு (3) ல் (1)-ஐ பயன்படுத்த,

∴ எதிர்தாக்கத்தின் செயல்படும் திசை $\Big\}\ F = \frac{W}{2}\tan\alpha.$

l நீளமுள்ள சீரான இரும்புத்துண்டின் எடை W. இதன் ஒரு முனை a நீளமுள்ள கயிற்றாலும் மற்றொரு முனை b நீளமுள்ள கயிற்றாலும் கட்டப்பட்டு ஒரு புள்ளியில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது எனில் இரும்புத்துண்டு கிடைக்கோட்டுடன்

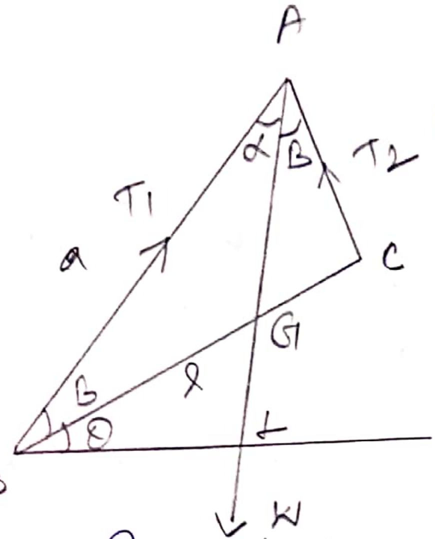
$$\sin^{-1}\left[\frac{a^2-b^2}{l\sqrt{2(a^2+b^2)-l^2}}\right]$$ கோணத்தில் சாய்ந்து உள்ளது என நிறுவுக.

Proof:-

BC என்பது l நீளமுள்ள ஒரு இரும்புத்துண்டு.

இதன் மையம் G. AB = a , AC = b. இவ்விசைகளை

செயல்படும் திசைகள்



(i) BA வழியே செயல்படும் இழுவிசை T_1

(ii) CA வழியே செயல்படும் இழுவிசை T_2.

(iii) இரும்புத்துண்டின் எடை W என்பது G வழியே செங்குத்தாக கீழ்நோக்கிச் செயல்படுகிறது.

இவ்விசைகள் அனைத்தும் புள்ளி A-யில் சந்திக்கிறது.

இரும்புத்துண்டு கிடைக்கோட்டுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் θ என்க.

ΔBLG-ல்

$$\cos\theta = \frac{BL}{BG}$$

$$BL = BG\cos\theta$$

$$BL = \frac{\ell}{2}\cos\theta \longrightarrow (1)$$

ΔABC-ல்

$$\cos(B+\theta) = \frac{BL}{AB}$$

$$BL = AB\cos(B+\theta)$$

$$BL = a\cos(B+\theta) \longrightarrow (2)$$

(1) = (2) எனில்

$$\frac{l}{2}\cos\theta = a\cos(B+\theta)$$

$$l\cos\theta = 2a\cos(B+\theta)$$

$$l\cos\theta = 2a(\cos B\cos\theta - \sin B\sin\theta)$$

$$l\cos\theta = 2a\cos B\cos\theta - 2a\sin B\sin\theta$$

$$2a\sin B\sin\theta = 2a\cos B\cos\theta - l\cos\theta$$

$$2a\sin B\sin\theta = \cos\theta[2a\cos B - l]$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2a\cos B - l}{2a\sin B}$$

$$\tan\theta = \frac{2a\cos B - l}{2a\sin B} \longrightarrow (3)$$

ΔABC -ல்

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\,BC\cos B$$

$$b^2 = a^2 + l^2 - 2al\cos B$$

$$2al\cos B = a^2 + l^2 - b^2$$

$$\cos B = \frac{a^2 + l^2 - b^2}{2al} \longrightarrow (4)$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta}}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}} \longrightarrow (5)$$

Scanned with CamScanner

சமன்பாடு (3) -ஐ (5) -ல் பயன்படுத்த

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{2a\sin B}{2a\cos B - l}\right]^2}}$$

$$= \frac{2a\cos B - l}{\sqrt{(2a\cos B - l)^2 + (2a\sin B)^2}}$$

$$= \frac{2a\cos B - l}{\sqrt{4a^2\cos^2 B - 4a\cos B\, l + l^2 + 4a^2\sin^2 B}}$$

$$\sin\theta = \frac{2a\cos B - l}{\sqrt{4a^2 - 4al\cos B + l^2}} \longrightarrow (6)$$

சமன்பாடு (4) -ஐ (6) -ல் பயன்படுத்த

$$\sin\theta = \frac{2a\left(\frac{a^2+l^2-b^2}{2al}\right) - l}{\sqrt{4a^2 - 4al\left(\frac{a^2+l^2-b^2}{2al}\right) + l^2}}$$

$$= \frac{a^2+l^2-b^2-l^2}{l\sqrt{4a^2 - 2(a^2+l^2-b^2) + l^2}}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{l\sqrt{2a^2 - l^2 + 2b^2}}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{l\sqrt{2(a^2+b^2) - l^2}}$$

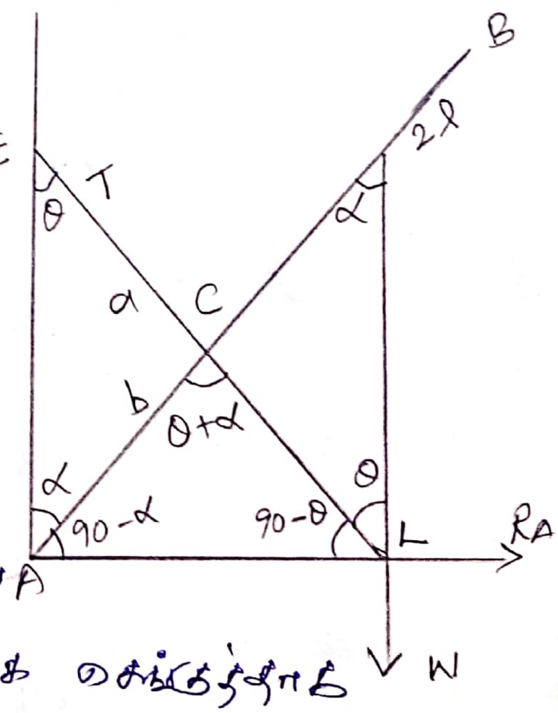
$$\therefore \theta = \sin^{-1}\left[\frac{a^2 - b^2}{l\sqrt{2(a^2+b^2) - l^2}}\right]$$ என நிறுவப்பட்டது.

$$= \frac{a^2-b^2}{l\sqrt{2(a^2+b^2)-l^2}}$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}\left[\frac{a^2-b^2}{l\sqrt{2(a^2+b^2)-l^2}}\right]$$ என நிறுவப்பட்டது.

(7) $2l$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான கம்பியின் கீழ்முனை ஒரு வழுவழுப்பான செங்குத்து சுவற்றைத் தொட்டுக் கொண்டு உள்ளது. கம்பியின் கீழ்முனையிலிருந்து b தூரத்தில் ஒரு கயிறு கட்டப்பட்டு கயிற்றின் மறுமுனை சுவற்றின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் நீளம் a கயிறு செங்குத்துக் கோட்டுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் θ எனில்

$$\cos^2\theta = \frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2 l(2b-l)}$$ என நிறுவுக.



தீர்வு:-

படத்தில் AB என்பது கம்பி. CE என்பது கயிறு $\angle AEC = \theta$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $\angle CAB = \alpha$ என எடுத்துக் கொள்க.

$AB = 2l$, $CE = a$, $AC = b$, $AG = l$.

இவ்வமைப்பின் செயல்படும் விசைகள்

(i) கம்பியின் எடை W, G வழியாக செங்குத்தாக கீழ்நோக்கி செயல்படுகிறது.

(ii) A-யின் எதிர்த்தாக்கம் R_A சுவற்றிற்கு செங்குத்தாக செயல்படுகிறது. இவ்விரு விசைகளும் சந்திக்கும் புள்ளி

l அருகு.

ΔACE -யின் sin அளவீட்டை பயன்படுத்த

$$\frac{AC}{\sin\theta} = \frac{EC}{\sin\alpha}$$

$$\sin\theta = \frac{AC\sin\alpha}{EC}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{a}\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}\sin\theta \longrightarrow (1)$$

ΔACL -ன் sin அளவீட்டை பயன்படுத்த

$$\frac{CL}{\sin(90-\alpha)} = \frac{AC}{\sin(90-\theta)} \qquad \because \sin(90-\theta) = \cos\theta$$

$$\frac{CL}{\cos\alpha} = \frac{AC}{\cos\theta}$$

$$CL = \frac{AC\cos\alpha}{\cos\theta} \longrightarrow (2)$$

Δ CGL -ன் சைனின் தேற்றத்தை பயன்படுத்த,

$$\frac{CL}{\sin\alpha} = \frac{LG}{\sin\theta}$$

$$CL = \frac{LG\sin\alpha}{\sin\theta}$$

$$CL = \frac{(l-b)\sin\alpha}{\sin\theta} \longrightarrow (3)$$

(2), (3) லிருந்து.

$$\frac{b\cos\alpha}{\cos\theta} = \frac{(l-b)\sin\alpha}{\sin\theta}$$

$$\frac{b\cos\alpha}{\sin\alpha} = (l-b)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$b\cot\alpha = (l-b)\cot\theta$$

$$\cot\alpha = \frac{(l-b)\cot\theta}{b} \longrightarrow (4)$$

$$\operatorname{cosec}^2\alpha = 1+\cot^2\alpha \longrightarrow (5)$$

சமன்பாடுகள் (1), (4)-லை (5)-ல் பிரதியிட

$$\frac{b^2}{a^2\sin^2\theta} = 1+\frac{(l-b)^2\cot^2\theta}{b^2}$$

$$\frac{b^2}{a^2\sin^2\theta} = \frac{b^2+(l^2+b^2-2bl)\cdot\cot^2\theta}{b^2}$$

$$\frac{b^2}{a^2\sin^2\theta} = \frac{b^2}{b^2}+\frac{(l^2+b^2-2bl)\cot^2\theta}{b^2}$$

$$\frac{b^2}{a^2\sin^2\theta} = 1+\frac{\frac{(l^2+b^2-2bl)\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}{b^2}$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \sin^2\theta+\frac{(l^2+b^2-2bl)\cos^2\theta}{b^2}$$

$$\frac{b^2}{a^2} = (1-\cos^2\theta)+\frac{(l^2+b^2-2bl)\cos^2\theta}{b^2}$$

$$\frac{b^2}{a^2}-1 = -\cos^2\theta+\frac{(l^2+b^2-2bl)\cos^2\theta}{b^2}$$

$$\frac{b^2-a^2}{a^2} = \cos^2\theta\left[\frac{l^2+b^2-2bl}{b^2}-1\right]$$

$$\frac{b^2-a^2}{a^2} = \cos^2\theta\left[\frac{l^2+b^2-2bl-b^2}{b^2}\right]$$

$$\frac{b^2-a^2}{a^2} = \cos^2\theta\left[\frac{l^2-2bl}{b^2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{b^2(b^2-a^2)}{a^2(l^2-2bl)} = \cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2 l(2b-l)} = \cos^2\theta$$

$$\therefore \boxed{\cos^2\theta = \frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2 l(2b-l)}}$$ என நிறுவப்பட்டது.

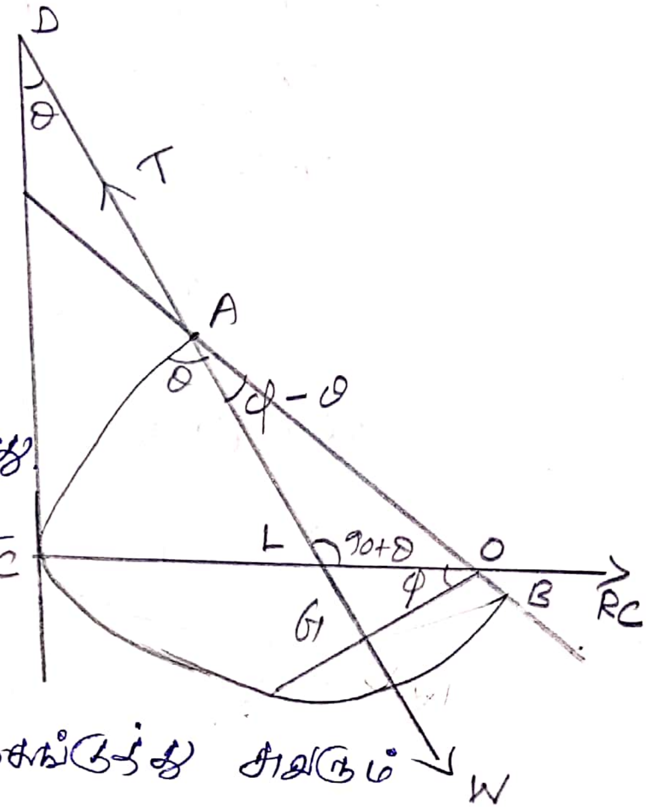
(8) திண்ம அரைக்கோளத்தின் விளிம்பில் ஒரு கயிறு கட்டப்பட்டு அக்கயிற்றின் மறுமுனை அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பை தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் ஒரு வழவழப்பான செங்குத்து சுவற்றில் கட்டப்பட்டுள்ளது. θ என்பது கயிறு மற்றும் செங்குத்து கோட்டிற்கு இடைப்பட்ட கோணம். ϕ - என்பது அரைக்கோளத்தின் விளிம்பு தளத்திற்கும் செங்குத்து கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் எனில்

$$\tan\phi = \frac{3}{8} + \tan\theta$$ என நிறுவுக.

Proof:-

படத்தில் அரைக்கோளத்தின் வெட்டுமுகம்

என்பது அரைக்கோளத்தின் விளிம்பில் ஒரு கயிறு கட்டப்பட்டு அதன் மறுமுனை அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பை தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் வழுவழுப்பான செங்குத்துச் சுவற்றில் கட்டப்பட்டுள்ளது.



படத்தில் AB என்பது அரைக்கோளத்தின் விளிம்பு. O என்பது அரைக்கோளத்தின் மையம்.

C என்பது அரைக்கோளம் செங்குத்து சுவரும் சந்திக்கும் புள்ளியாகும்.

அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம்

$$OG = \frac{3}{8} r$$

அரைக்கோளத்தின் செயல்படும் விசைகள்

(i) C-யின் எதிர்தாக்கம் R_C சுவற்றிற்கு செங்குத்தாக O-வழியே செயல்படும்.

(ii) நூலின் இழுவிசை T.

(iii) அரைக்கோளத்தின் எடை W, G வழியே செங்குத்தாக கீழ்நோக்கிச் செயல்படுகிறது.

$\triangle LOG$-ல்

$$\cos\varphi = \frac{OL}{OG}$$

$$OL = OG \cos\varphi$$

$$OL = \frac{3r}{8} \cos\varphi \longrightarrow (1)$$

ΔOAC-இல் sin தாவிதியை பயன்படுத்த

$$\frac{OA}{\sin(90+\theta)} = \frac{OL}{\sin(\varphi-\theta)}$$

$$OL = \frac{\sin(\varphi-\theta)r}{\cos\theta} \longrightarrow (2)$$

$\because \sin(90-\theta) = \cos\theta$

$\sin(90+\theta) = \cos\theta$

from (1) & (2)

$$\frac{3r}{8}\cos\varphi = \frac{r\sin(\varphi-\theta)}{\cos\theta}$$

$$\frac{3r\cos\varphi}{8} = \frac{r(\sin\varphi\cos\theta-\cos\varphi\sin\theta)}{\cos\theta}$$

$$3r\cos\varphi\cos\theta = 8r(\sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta)$$

$$\frac{3}{8}\cos\varphi\cos\theta = \sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta$$

$$\frac{3}{8} = \frac{\sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta}{\cos\varphi\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\varphi\cos\theta}{\cos\varphi\cos\theta} - \frac{\cos\varphi\sin\theta}{\cos\varphi\cos\theta}$$

$$\frac{3}{8} = \tan\varphi - \tan\theta$$

$\therefore \boxed{\tan\varphi = \frac{3}{8} + \tan\theta}$ என நிறுவப்பட்டது.

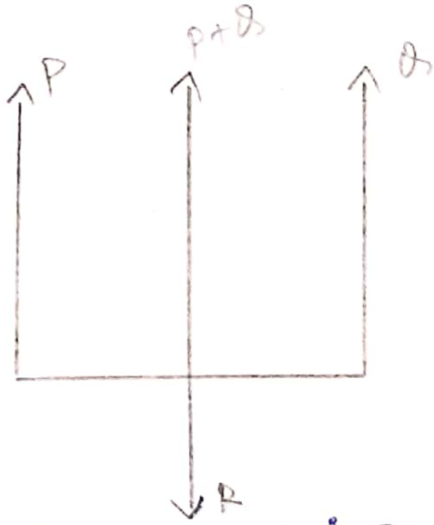
(9) Theorem:-

மூன்று ஒருதள விசைகளுக்கான தேற்றம் (or)

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மீது செயல்படும் மூன்று ஒருதள விசைகள் சமநிலையில் இருந்தால் அவை ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் அல்லது ஒன்றுக்கொன்று இணையாக இருக்கும்.

Proof:-

ஒரு கட்டிறுக்க பொருளில் செயல்படும் விசைகள் P, Q, R சமநிலையில் உள்ளது என்க. விசைகள் P, Q-ன் விளைவு விசை மூன்றாம் விசை R-க்கு சமமாகவும் எதிர்திசையில் செயல்படுவதாகும் இருக்கும். P மற்றும் Q என்பன ஒருதள விசைகள் என்பதால் அவை இணையாகவோ அல்லது வெட்டிக்கொண்டோ இருக்கும்.

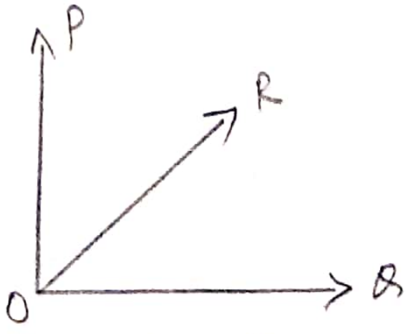


Case (i):-

விசைகள் P மற்றும் Q என்பன இணைவிசைகள் அல்லது ஒருபோக்கு இணை விசைகள் அவற்றின் விளைவு விசையும் ஒரு இணை விசையாகும். மூன்றாம் விசை R முதல் இரு விசைகளின் விளைவு விசைக்களை சமன்செய்யும் என்பதால் அது அவ்விளைவு விசையின் கோட்டிலேயே எதிர்திசையில் செயல்படும். இப்போது விசை R-ம் விசை P, Q இவற்றின் இணையாகவே இருக்கும்.

Case (ii):-

விசைகள் P மற்றும் Q என்பன O வில் சந்திக்கிறது என்க. விசைகளின் இணைகர விதிப்படி இவற்றின் விளைவு விசை O வழியாகச் செல்லும்.



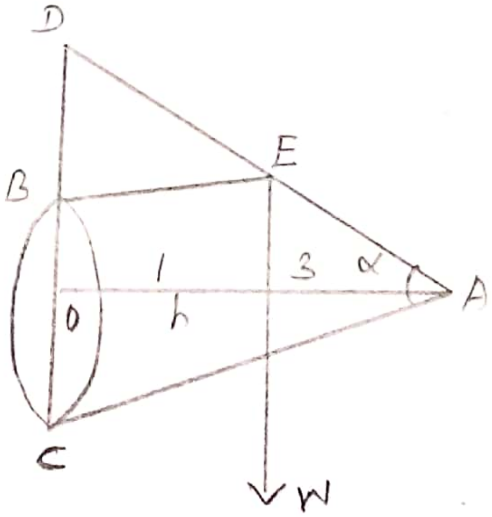
Scanned with CamScanner

இது மூன்றாம் விசை R-ஐ சந்திக்கும் என்பதால் விசை R-ன் செயல்கோட்டிலேயே மூன்றாவது விசையும் செயல்படும் என்பதால் இவ்விசை O வழியாகவும் செல்லும். அதாவது மூன்று விசைகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும்.

(10) h உயரமும் α அரை உச்சிக் கோணமும் உள்ள ஒரு திண்மையான கூம்பின் அடிப்பாகம் ஒரு செங்குத்தான வழுவழுப்பான சுவர் மீது வைக்கப்பட்டு அதன் உச்சியையும் சுவற்றிலுள்ள ஒரு புள்ளியையும் இணைக்கும் ஒரு இழையால் தாங்கப்படுகிறது. அந்த இழையின் நீளம் $h\sqrt{1+\frac{16}{9}\tan^2\alpha}$ எனக் காட்டுக.

Proof:-

h உயரமுள்ள ஒரு திண்ம கூம்பானது G என்ற புவியீர்ப்பு மையமானது 3:1 என்ற விகிதத்தில் இருக்கும்.



$AG = \frac{3}{4}h$ எனவும்

$OG = \frac{1}{4}h$ எனவும்

$OA = h$ எனவும் கொள்க.

இழையின் நீளம்

$AD = AE + ED \longrightarrow (1)$

இங்கே ΔAOD, ΔAGE என்பவை ஒன்றுக்கொன்று ஒத்தவை எனவே,

$$\frac{DE}{AE} = \frac{OG}{GA}$$

$$DE = \frac{OG}{GA} AE$$

$$= \frac{\frac{1}{4}h}{\frac{3}{4}h} AE$$

$$DE = \frac{1}{3} AE \longrightarrow (2)$$

சமன்பாடு (2) -ஐ (1) -ல் பிரதியிட

$$AD = AE + \frac{1}{3} AE$$

$$AD = \frac{4}{3} AE \longrightarrow (3)$$

Δ AOB -ல்

$$\tan\alpha = \frac{OB}{OA}$$

$$\tan\alpha = \frac{EG}{OA} \qquad \because OB = EG$$

$$EG = OA \tan\alpha$$

$$\Rightarrow EG = h \tan\alpha$$

Δ AEG -ல்

$$AE^2 = AG^2 + GE^2$$

$$AE^2 = \frac{9}{16} h^2 + h^2 \tan^2\alpha$$

$$AE = \sqrt{\frac{9}{16} h^2 + h^2 \tan^2\alpha}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{16} h^2 \left(1 + \frac{16}{9} \tan^2\alpha\right)}$$

$$AE = \frac{3}{4} h \sqrt{1 + \frac{16}{9} \tan^2\alpha} \longrightarrow (4)$$

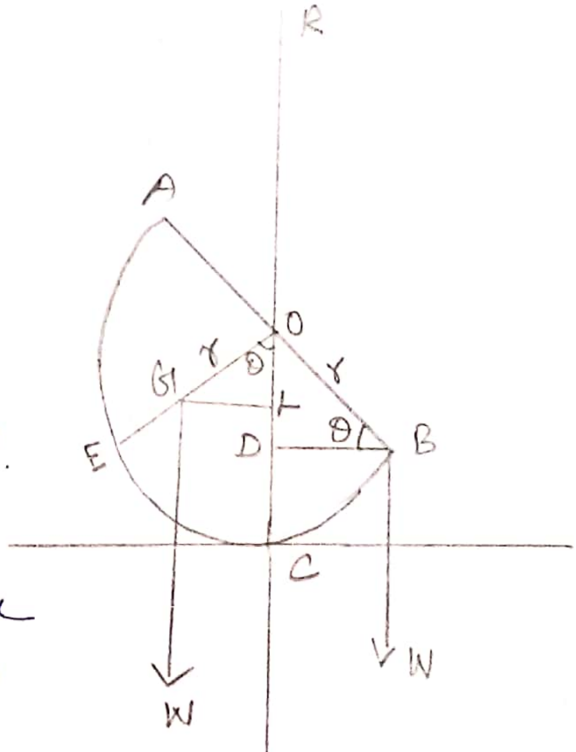
சமன்பாடு (4) -ஐ (3) -ல் பிரதியிட

$$\Rightarrow AD = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} h \sqrt{1 + \frac{16}{9}\tan^2\alpha}$$

$\therefore \boxed{AD = h\sqrt{1 + \frac{16}{9}\tan^2\alpha}}$ என நிறுவப்பட்டது.

(11) சீரான திண்ம அரைக்கோளம் W எடையுடைய அதன் வளைவு விளிம்பில் கரடுமுரடான கிடைத்தளத்தில் உள்ளது. திண்ம அரைக்கோளத்தின் விளிம்பில் ஒரு புள்ளியில் w எடையானது தொங்கவிடப்படுகிறது. திண்ம அரைக்கோளமானது கிடைத்தளத்துடன் θ கோணத்தை உருவாக்கினால் $\tan\theta = \frac{8w}{3W}$ என நிறுவுக.

Proof:-



இவ்வமைப்பில் செயல்படும் விசைகள்

(i) கிடைத்தளத்திற்கு எதிராக செயல்படும் எதிர்தாக்கம் R.

(ii) G-ன் வழியே கீழ்நோக்கி செங்குத்தாக செயல்படும் எடை W.

(iii) திண்ம அரைக்கோளத்தின் B என்ற புள்ளியில் செயல்படும் எடை w. இங்கு G என்ற புள்ளியைப் பொறுத்து r ஆரமுள்ள திண்ம அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம்

$$OG = \frac{3}{8} r \text{ ஆகும்.}$$

ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் மூன்று விசைகள் சமநிலையில் இருந்தால் அவை ஒன்றையொன்றும் மற்ற

இருமுனைகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்திற்கு எதிர்த்தகவில் இருக்கும். எனவே திருப்புத்திறன்

$$\frac{W}{BD} = \frac{W}{GL} \longrightarrow (1)$$

$\Delta\, OBD$ -ல்

$$\cos\theta = \frac{BD}{OB}$$

$$BD = OB\cos\theta$$

$$BD = r\cos\theta \longrightarrow (2)$$

$\Delta\, OGL$ -ல்

$$\sin\theta = \frac{GL}{OG}$$

$$\Rightarrow GL = OG\sin\theta$$

$$GL = \frac{3}{8} r\sin\theta \longrightarrow (3)$$

சமன்பாடு (2), (3) - யை (1) -ல் பிரதியிட

$$\frac{W}{r\cos\theta} = \frac{W}{\frac{3}{8} r\sin\theta}$$

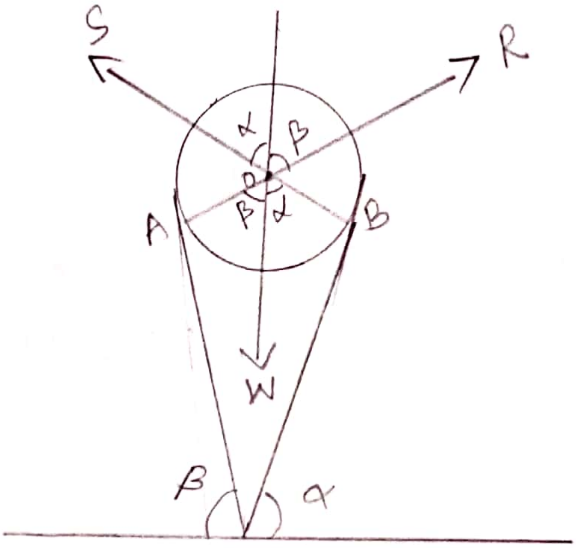
$$\frac{\sin\theta\, W}{\cos\theta} = \frac{8}{3} W$$

$$\therefore \boxed{\tan\theta = \frac{8W}{3W}}$$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

ஒரு கோளமானது அடுத்தடுத்த தளத்துடன் α, β என்ற சாய்வு கோணங்களை உண்டாக்குகிறது. கோளமானது தரையினை அடுத்துச் சாய்ந்து அதன் எடை பாதியாக இருக்கிறது எனில் $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}\right)$ என நிறுவுக.

Proof:-

கோளமானது அழுவழுப்பான தளத்துடன் α, β என்ற சாய்வு கோணங்களை ஏற்படுத்துகிறது. R மற்றும் S என்பன தளத்திற்கு செங்குத்தாக செயல்படுகிறது. கணக்கின் படி



$$S = \frac{W}{2}$$

R மற்றும் S ஆகியவை O என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. இப்புள்ளியில் W என்ற எடையும் செயல்படுகிறது. O என்ற புள்ளியில் லாமியின் தேற்றத்தை பயன்படுத்த,

$$\frac{W}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{S}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha}$$

$$\frac{W}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{W}{2\sin\beta}$$

$$2\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$$

$$2\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$2 = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\beta}$$

$$2 = \sin\alpha\cot\beta + \cos\alpha$$

$$2 - \cos\alpha = \sin\alpha\cot\beta$$

$$2 - \cos\alpha = \sin\alpha\cot\beta$$

$$2 - \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\tan\beta}$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\alpha}{2 - \cos\alpha}$$

$$\therefore \boxed{\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\alpha}{2 - \cos\alpha}\right)}$$ என நிறுவப்பட்டது.

(13) $2a$ நீள பக்கமுடைய சதுரம் ஒன்று c இடைவெளியில் ஒரு கிடைக்கோட்டில் அமைந்துள்ள இரு ஒப்பமான முளைகளுக்கிடையில் அதன் தளம் நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு வைக்கப்படுகின்றது. அது சமநிலையில் இருக்கும் போது இருக்கும் போது கிடைக்கோட்டுடன் அதன் பக்கங்களில் ஒன்றின் சாய்வு $\frac{\pi}{4}$ அல்லது $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a^2-c^2}{c^2}\right)$ எனக் காட்டுக.

Proof :-

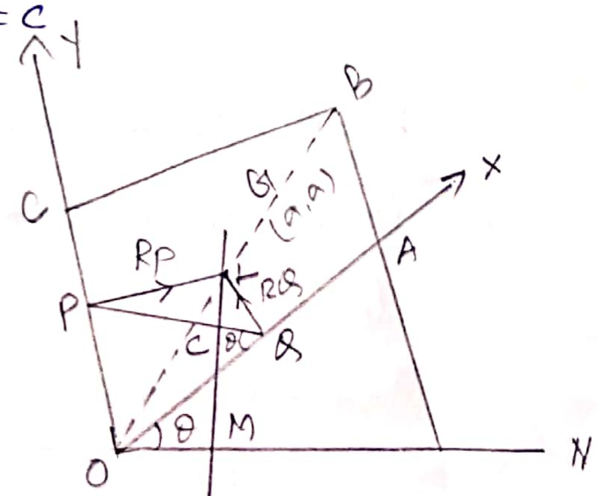
OABC என்பது ஒரு சதுரம்.

OA கிடைத்தளத்துடன் θ கோணத்தை உண்டாக்குகிறது என்க. $PQ = c$

G என்பது புவியீர்ப்பு மையம்

PQ க்கு செங்குத்தாக செயல்படுகிறது. $P\hat{Q}O = \theta$

சதுரத்தின் அமைப்பில் செயல்படும் விசைகள்



(i) OC க்கு செங்குத்தாக P என்ற புள்ளியில் Rp என்ற எதிர்த்தாக்கம் செயல்படுகிறது.

(ii) OA க்கு செங்குத்தாக Q என்ற புள்ளியில்

RQ என்ற எதிர்தாக்கம் அமைகிறது. இந்த இரண்டு எதிர்தாக்க அலைகளும் சந்திக்கும் புள்ளி L என்க.

இந்த L என்ற புள்ளியின் நின்று அலைகளும் செயல்படுவதால் பாதையின் தேற்றத்தை பயன்படுத்துக.

GL என்பது PQ க்கு செங்குத்தாகும்.

OPLQ என்பது ஒரு சதுரமாகும். OA என்பதை x-அச்சாகவும் OC என்பதை y அச்சாகவும் எடுத்துக் கொள்க.

ΔOPQ -ல்

$$\cos\theta = \frac{OQ}{PQ}$$

$$OQ = PQ\cos\theta$$

$$OQ = c\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{OP}{PQ}$$

$$OP = PQ\sin\theta$$

$$OP = c\sin\theta$$

L -ன் ஆயத்தொலைவுகள் $(\overset{x_1}{c\cos\theta}, \overset{y_1}{c\sin\theta})$

G -ன் ஆயத்தொலைவுகள் $(\overset{x_2}{a}, \overset{y_2}{a})$

GL -ன் சாய்வு

$$\frac{c\sin\theta - a}{c\cos\theta - a} = m_1 \longrightarrow (1)$$

PQ என்ற x அச்சோடு ஏற்படுத்தும் கோணம் $180-\theta$ இதிலிருந்து PQ -ன் சாய்வு,

$$\tan(180-\theta) = -\tan\theta \longrightarrow (2)$$

$$m_1 \times m_2 = -1$$

$$\left(\frac{c\sin\theta - a}{c\cos\theta - a}\right)\left(\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}\right) = -1$$

$$\frac{(c\sin\theta - a)\sin\theta}{(c\cos\theta - a)\cos\theta} = 1$$

$$\frac{c\sin^2\theta - a\sin\theta}{c\cos^2\theta - a\cos\theta} = 1$$

$$c\sin^2\theta - a\sin\theta = c\cos^2\theta - a\cos\theta$$

$$a\cos\theta - a\sin\theta = c\cos^2\theta - c\sin^2\theta$$

$$a(\cos\theta - \sin\theta) = c(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$a(\cos\theta - \sin\theta) = c(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta)$$

$$a(\cos\theta - \sin\theta) - c(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = 0$$

$$(\cos\theta - \sin\theta)\{a - c(\cos\theta + \sin\theta)\} = 0$$

$$\cos\theta - \sin\theta = 0$$

$$\cos\theta = \sin\theta$$

$$\tan\theta = 1$$

$$\therefore \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

$$a - c(\cos\theta + \sin\theta) = 0$$

$$a = c(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$\frac{a}{c} = \cos\theta + \sin\theta$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$\frac{a^2}{c^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{a^2}{c^2} - 1 = \sin 2\theta$$

$$\frac{a^2 - c^2}{c^2} = \sin 2\theta$$

$$2\theta = \sin^{-1}\left(\frac{a^2 - c^2}{c^2}\right)$$

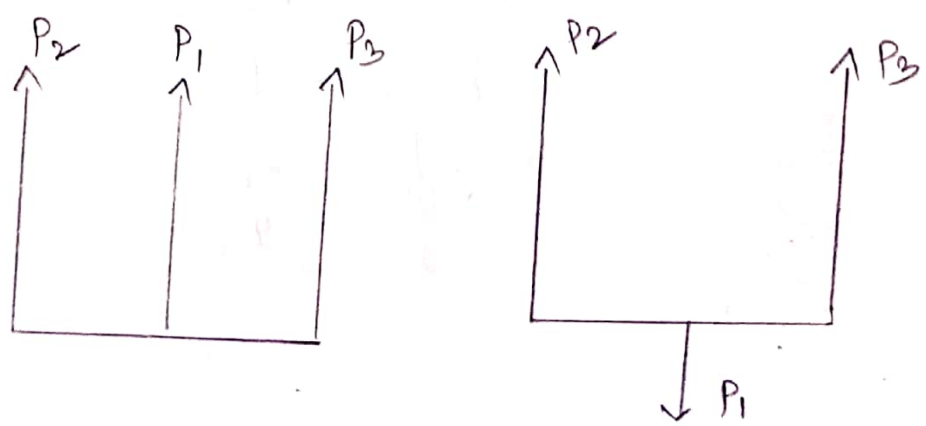
$$\therefore \boxed{\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a^2 - c^2}{c^2}\right)}$$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

Coplaner forces

Theorem ① :-

ஒரு கட்டுறுக்கப் பொருளின் மீது ஒரு தளத்தில் செயல்படும் விசைகளின் அமைப்பை ஒரே ஒரு விசையாகவோ அல்லது இரட்டையாகவோ குறுக்கலாம்.

நிறு !-



மூன்று ஒரு தள அசைகள் P_1, P_2, P_3 இவற்றை இரண்டு அசையாக குறைக்கலாம்.

அசை P_1 யை P_2 அல்லது P_3 சுழலிணையாக இல்லாத நிலையில் சேர்க்கலாம். P_1 என்பது P_2 மற்றும் P_3 உடன் சுழலிணையாக இருக்குமெனில் P_2 மற்றும் P_3 ஒருபோக்கு இணையசைகளாகும். இதனை ஒரே அசையாக குறைக்கலாம்.

எனவே மூன்று ஒருதள அசைகளை இரண்டு அசைகளாக குறைக்கலாம்.

Proof :-

கட்டிறுக்கப் பொருளின் ஒரே தளத்தில் n ஒருதள அசைகள் $P_1, P_2, \ldots P_n$ தரப்படுகிறது என்க. இந்த n அசைகளில் ஏதேனும் மூன்று அசைகளை எடுத்துக் கொண்டு ஏதேனும் ஒரு அசையாகக் குறைக்கலாம். அப்போது $n-1$ அசைகள் மட்டுமே உள்ளது. மீண்டும் இந்த $n-1$ அசைகளில் மும்மூன்றாக கொண்டு அசைகளை குறைக்கலாம். இறுதியாக P_{n-2} P_{n-1} P_n என்ற அசைகள் மட்டுமே இருக்கும். இம்மூன்று அசைகளையும் இரு அசைகளாக குறைக்கலாம். இவ்விரு அசைகளும் சுழலிணையாக இல்லாத நிலையில் அவற்றை ஒரே அசையாக குறைக்கலாம். இறுதியில் இரு அசைகளும் ஒரு சுழலிணையாக இருந்தால் கொடுத்துள்ள அசைகள் அனைத்தும் ஒரு சுழலிணையாக குறிக்கப்படும்.

Theorem : 2

ஒரு அமைப்பிலுள்ள விசைகள் ஒரே விசை அல்லது ஒரே சுழலிணையாக ஆகுவதற்கு நிபந்தனைகள்.

Proof :-

ஒருதள விசைகளின் ஒரு அமைப்பிலுள்ள விசைகள் அனைத்தையும் ஏதேனுமொரு புள்ளி O யின் விசை R மற்றும் சுழலிணை G என குறைக்கப்படுகிறது என்க.

இங்கு $R = X^2 + Y^2$ மற்றும் $G = 0$ பொறுத்து விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித கூடுதலாகும்.

$R = 0$ எனில் $X = 0$ மற்றும் $Y = 0$ என ஒரே சமயத்தில் இருக்க வேண்டும்.

Case 1 :-

$X \neq 0$ மற்றும் $Y \neq 0$ இங்கு $G = 0$ ஆகும். அதாவது அமைப்பு ஒரே ஒரு விசை R என மாறும். விசைகளின் ஒரு அமைப்பு ஒரேயொரு விசையாக குறைக்கப்படுவதற்கு தளத்தில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை பொறுத்து விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித கூடுதல் 0 (பூஜ்ஜியம்) ஆக இருக்க வேண்டும்.

மேலும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளில் விசைகளின் கூறுகளின் கூடுதல் 0 (பூஜ்ஜியம்) அல்ல.

Case 2 :-

$X = 0$, மற்றும் $Y = 0$ இங்கு $G \neq 0$

விசைகளின் அமைப்பு ஒரு சுழலிணையாக மாறும். அதாவது விசைகளின் அமைப்பு ஒரு சுழலிணையாக குறைக்கப் -

எடுத்து ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இரு திசைகளின் விசைகளின் இயற்கணித கூடுதல் ஒவ்வொன்றும் 0 (பூஜ்ஜியம்) ஆக இருக்க வேண்டும்.

மேலும் தளத்தில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி O யைப் பொறுத்து அனைத்து விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் கூடுதல் 0 (பூஜ்ஜியம்) ஆகும்

Theorem ③:-

ஒருதள விசை தொகுதியிலுள்ள விசைகளை அதே தளத்திலுள்ள ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகளை பொறுத்து திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித கூடுதல் தனித்தனியே பூஜ்ஜியம் சமமானால் அவ்விசைத் தொகுதி ஒரு சமநிலையாக இருக்கும் என நிறுவுக.

Proof:-

விசைகள் அமைந்துள்ள தளத்தில் A, B, C ஆகியவை ஒரே ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகள் என்க.

இப்புள்ளி ஒவ்வொன்றையும் பொறுத்து விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணித கூடுதல் l, m, n என்க.

விசைகள் ஒரு சமநிலையாக இருக்கும் என நிறுவ வேண்டும்.

முடிவுகளின் விசைகள் ஒரு சமநிலையாக இருக்க இல்லை என எடுத்துக்கொண்டால் விசை R செயல்படும் கோட்டிலிருந்து புள்ளிகள் A, B, C ஆகியவை P_1, P_2, P_3 என்ற செங்குத்து தூரத்தில் உள்ளது என்போம்.

இப்புள்ளிகளை பொறுத்து விசை R-ன் திருப்புத்திறன்

$$P_1 R = L$$

$$P_2 R = M$$

$$P_3 R = N$$

மேலும் $L = M = N$ ஆகும். எனவே $P_1 = P_2 = P_3$

இதிலிருந்து அச்சுக்குத் தூரங்கள் சமம்.

அதாவது புள்ளிகள் A, B, C திசை R செயல்படும் கோட்டிலிருந்து சம தூரத்தில் உள்ளது. அதாவது A, B, C என்பவை ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளது. இது கொடுத்துள்ள கூற்றுக்கு முரண்பாடு.

எனவே விசைகளின் அமைப்பு ஒரு திசையாக இருக்காது. அது ஒரு இரட்டையாக இருக்கும்.

Theorem: (1)

ஒரு விசை தொகுப்பின் ஒருங்கிய விசையின் செயல் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

Solution:-

விசை செயல்படும் கோட்டின் சமன்பாடு விசைகளின் அமைப்பு சமநிலையில் இல்லை என்போம்.

மேலும் விசை ஒரேயொரு விசை R ஒருங்கிணைவதாகவும் புள்ளி (h, k) இலிருந்து செயல்படுவதாகவும் கொள்வோம்.

மேலும் ஒரு திருப்புதிறன் G' உள்ளது எனவும் கொள்வோம்.

எனவே,

$$R^2 = X^2 + Y^2 \longrightarrow (1)$$

$$G' = G - hY + kX \longrightarrow (2)$$

$R \neq 0$ எனில் (h, k) என்ற புள்ளியை திருப்புத்திறன் $G' = 0$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$G - hY + kX = 0 \longrightarrow (3)$$

மேலும் விசைகளின் அமைப்பு புள்ளி (h, k) இல் செயல்படும். இது ஒரு விசை R என இருக்கும். சமன்பாடு (3) இலிருந்து புள்ளி (h, k)

$$G - xY + yX = 0 \longrightarrow (4)$$

என்ற நேர்க்கோட்டில் இருக்கும். அந்நேர்க்கோட்டின் சரிவு $= Y/X$ ஆகும்.

அந்த நேர்க்கோடு x அச்சுடன் $\tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$ கோணச் சாய்வில் கோட்டிற்கு இணையானவை.

ஆனால் (h, k) வழியே செயல்படுவதால் சமன்பாடு (4) ஆனது R செயல்படும் கோட்டின் சமன்பாடாகும். அதாவது,

$G - xY + yX = 0$ என்பது விசை R செயல்படும் கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

(2) பக்களவு a அளவுள்ள சதுரம் $ABCD$-ன் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA வழியாக விசைகள் $P, 4P, 2P, 6P$ செயல்படுகிறது எனில் விசைகளின் அமைப்பை

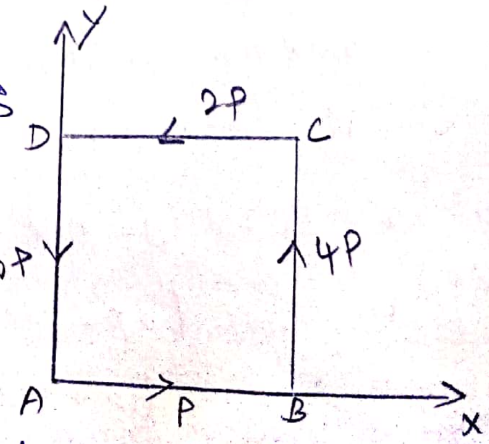
(i) A-யில் செயல்படும் ஒரு விசையாகவும் இரட்டையாகவும் மாற்றுக.

(ii) விளைவு விசை செயல்படும் கோட்டின் சமன்பாடு $2x - y + 6a = 0$ இங்கு AB மற்றும் AD அச்சுகளை x, y-ன் அச்சுகள்.

(iii) விளைவு விசை AB மற்றும் AD சந்திக்கும் புள்ளிகளை காண்.

Solution:-

(i) AB, AD யை x, y அச்சுகளாக எடுத்துக் கொள்க.



விசைகளை x, y அச்சுகளில் பிரிக்க.

$X = R\cos\theta = P\cos 0 + 4P\cos 90 - 2P\cos 0 - 6P\cos 90$

$$= P + 0 - 2P - 0$$

$$X = -P$$

$$Y = R\sin\theta = P\sin 0 + 4P\sin 90 - 2P\sin 0 - 6P\sin 90$$

$$= 0 + 4P - 0 - 6P$$

$$Y = -2P$$

$$R^2 = X^2 + Y^2$$

$$= (-P)^2 + (-2P)^2$$

$$R^2 = 5P^2$$

$$\therefore R = P\sqrt{5}$$

$$\theta = \tan^{-1}(Y/X)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{-2P}{-P}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}(2)$$

G = புள்ளி A யைப் பொறுத்து விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் கூடுதல்

$$G = 4Pa + 2Pa$$

$$G = 6Pa$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட விசைகளை $P\sqrt{5}$ அளவுள்ள விசையாகவும் $6Pa$ திருப்புத்திறன் அளவுள்ள ஒரு இணையாகவும் மாற்றலாம்.

(ii) விளைவு விசை செயல்படும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$G - xY + yX = 0$$

$$6aP - x(-2P) + y(-P) = 0$$

$$6a + 2x - y = 0$$

$$\therefore 2x - y + 6a = 0$$

Scanned with CamScanner

(iii) இணைவு விசை வெட்டும் புள்ளியை காணுதல் :-

இணைவு விசை AB-யை வெட்டும் இடத்தில் $y=0$ எனவே,

$$6a+2x=0$$
$$2x=-6a$$
$$x=-3a$$

∴ AB யை வெட்டும் புள்ளிகள் $(-3a,0)$

இணைவு விசை AD-யை வெட்டும் இடத்தில் $x=0$ எனவே,

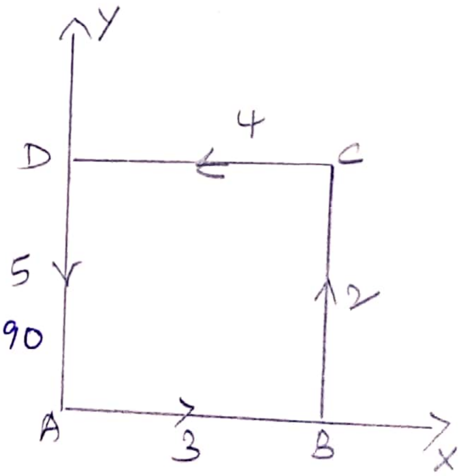
$$6a-y=0$$
$$6a=y$$

∴ AD-யை வெட்டும் புள்ளி $(0,6a)$

(3) விசைகள் 3, 2, 4, 5 கிலோ எடையுடன் AB, BC, CD, DA வழியே செயல்படுகின்றன. ABCD என்பது ஒரு சதுரம் எனில் இணைவு விசையின் அளவை காண்க. மேலும் இணைவு விசை செயல்படும் கோட்டின் சமன்பாடு மற்றும் AB மற்றும் AD ஆகியவற்றை வெட்டும் புள்ளிகளையும் காண்க.

Solution:-

AB, AD யை X, Y அச்சுகளாக எடுத்துக் கொள்க.



விசைகளை X, Y அச்சுகளில் பிரிக்க

$$X = R\cos\theta = 3\cos 0 + 2\cos 90 - 4\cos 0 - 5\cos 90$$
$$= 3+0-4-0$$
$$X = -1$$

$$Y = R\sin\theta = 3\sin 0 + 2\sin 90 - 4\cos 0 - 5\cos 90$$
$$= 0+2-0-5$$
$$Y = -3$$

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$R^2 = (-1)^2 + (-3)^2$$

$$R^2 = 1 + 9$$

$$R^2 = 10$$

$$\therefore R = \sqrt{10}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{-3}{-1}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}(3)$$

$G = 4$ என்பது A-யைப் பொறுத்து விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் கூடுதல்

$$G = 4 + 2$$

$$G = 6$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட விசைகள் $\sqrt{10}$ அளவுள்ள விசையாகவும் 6 திருப்புத் திறன் அளவுள்ள ஒரு இணையாகவும் மாறுகின்றன.

(ii) விளைவு விசை செயல்படும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$G - xY + yX = 0$$

$$6 - x(-3) + y(-1) = 0$$

$$6 + 3x - y = 0$$

(iii) விளைவு விசை வெட்டும் புள்ளி காணல் :-

விளைவு விசை AB யை வெட்டும் இடத்தில் $y = 0$

$$6 + 3x = 0$$

$$3x = -6$$

$$x = -2$$

AB-யை வெட்டும் புள்ளி $(-2, 0)$

இவ்வாறு இதை AD-யை வெட்டும் இடத்தில் $x = 0$

$$6 - y = 0$$

$$y = 6$$

AD-யை வெட்டும் புள்ளி $(0, 6)$

Scanned with CamScanner

AB -யை வெட்டும் புள்ளி $(-2,0)$

இவ்வாறு இதை AD -யை வெட்டும் இடத்தில் $x=0$

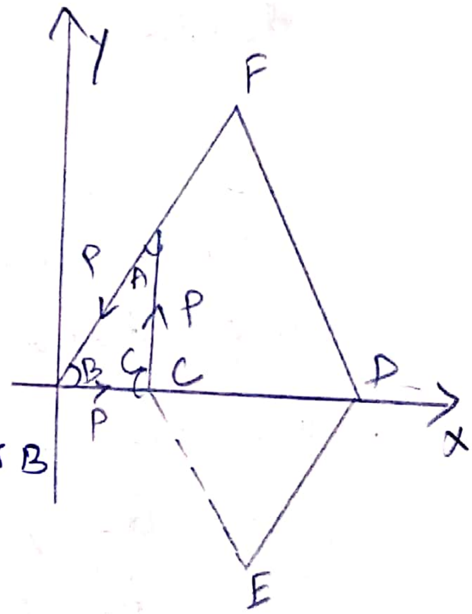
$$6-y=0$$

$$y=6$$

AD -யை வெட்டும் புள்ளி $(0,6)$

மூன்று சமவிசைகள் P, P, P $\triangle ABC$ -ன் பக்கங்கள் வழியே வரிசையாகச் செயல்படுகிறது எனில் அதன் விளைவு விசை $R = P\left\{1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right\}$ என நிறுவுக.

Proof:-



BC யை x அச்சாகவும் BC -க்கு செங்குத்தாக உள்ள கோட்டை y அச்சாகவும் கொள்க.

x, y அச்சுகளின் கூறுகளின் கூடுதல்

$$X = R\cos\theta = P\cos 0 + P\cos(180-C) - P\cos B$$

$$X = P(1) + P(-\cos C) - P\cos B$$

$$X = P - P\cos C - P\cos B$$

$$X = P(1-\cos C-\cos B) \longrightarrow (1)$$

$$Y = R\sin\theta = P\sin 0 + P\sin(180-C) - P\sin B$$

$$= P(0) + P\sin C - P\sin B$$

$$Y = P(\sin C - \sin B) \longrightarrow (2)$$

இவ்வாறு இதை $R^2 = X^2 + Y^2$

$$R^2 = p^2(1-\cos C-\cos B)^2 + p^2(\sin C - \sin B)$$

$$R^2 = p^2\{(1-\cos C-\cos B)^2 + (\sin C - \sin B)^2\}$$

$$= p^2\{1+\cos^2 C + \cos^2 B - 2\cos C + 2\cos C\cos B -$$

$$2\cos B + \sin^2 C + \sin^2 B - 2\sin C\sin B\}$$

$$= p^2\{[1+1+1+2(\cos B\cos C - \sin B\sin C)] - 2\cos B - 2\cos C\}$$

$$= p^2\{3+2[\cos(B+C)] - 2(\cos B+\cos C)\}$$

$$= p^2\{3-2\cos A - 2(\cos B+\cos C)\}$$

$$= p^2\{3-2(\cos A+\cos B+\cos C)\}$$

$$= p^2\{3-2(1+4\sin\tfrac{A}{2}\sin\tfrac{B}{2}\sin\tfrac{C}{2})\}$$

$$= p^2\{3-2-8\sin\tfrac{A}{2} - 8\sin\tfrac{B}{2} - 8\sin\tfrac{C}{2}\}$$

$$= p^2\{1-8\sin\tfrac{A}{2} - 8\sin\tfrac{B}{2} - 8\sin\tfrac{C}{2}\}$$

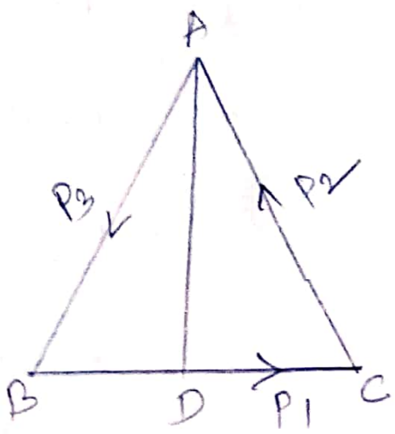
$\therefore R^2 = p^2\{1-8(\sin\tfrac{A}{2}\sin\tfrac{B}{2}\sin\tfrac{C}{2})\}$ என நிறுவப்பட்டது.

P_1, P_2, P_3 என்பன ΔABC-ன் BC, CA, AB இவற்றின் பக்கங்களில் செயல்படுகின்றது. இவ்விசைகள் ஒரு சுழலிணையாக இருப்பின் $\dfrac{P_1}{BC} = \dfrac{P_2}{CA} = \dfrac{P_3}{AB}$ எனக் காட்டுக.

நிறுவல்:—

A-யை பொறுத்து விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் கூடுதல்

$$A = P_1 \, AD \longrightarrow (1)$$



$$\Delta = \frac{1}{2} BC \cdot AD$$

$$\Rightarrow AD = \frac{2\Delta}{BC} \longrightarrow (2)$$

சமன்பாடு (2)-ஐ (1)-ல் பிரதியிட

$$\Rightarrow A = P_1 \frac{2\Delta}{BC}$$

|||ly B-யைப் பொறுத்து விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் கூடுதல்

$$B = P_2 \frac{2\Delta}{CA}$$

C-யைப் பொறுத்து விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் கூடுதல்

$$C = P_3 \frac{2\Delta}{AB}$$

A, B, C என்பவை ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையாத புள்ளிகள். மேலும், விசைகள் ஒரு சமநிலையைக் குறிக்கிறது எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே,

A-யைப் பொறுத்து விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் கூடுதல் = B-யைப் பொறுத்து விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் கூடுதல் = C-யைப் பொறுத்து விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் கூடுதல்

$$\therefore \frac{P_1 \, 2\Delta}{BC} = \frac{P_2 \, 2\Delta}{CA} = \frac{P_3 \, 2\Delta}{AB}$$

$$\therefore \frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{CA} = \frac{P_3}{AB}$$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

(5) சிறுவிசைகள் 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்பன ஒரு ஒழுங்கு அறுங்கோணம் ABCDEF -ன் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DE, EF, FA ஆகியவை செயல்படுகிறது எனில் அதன் விளைவு விசையின் அளவு மற்றும் திசையைக் காண்க.

Solution:-

$$X = R\cos\theta = 1\cos 0 + 2\cos 60 + 3\cos 120 + 4\cos 180 + 5\cos 240 + 6\cos 300$$

$$X = 1(1) + 2\left(\tfrac{1}{2}\right) + 3\cos(180-60) + 4(-1) + 5\cos(180+60) + 6\cos(360-60)$$

$$= 1+1+3(-\cos 60) - 4 + 5$$

$$X = 2 - \frac{3}{2} - 4 - \frac{5}{2} + \frac{6}{2}$$

$$X = -2 - \frac{2}{2}$$

$$= -2 - 1$$

$$\therefore X = -3$$

$$Y = R\sin\theta = 1\sin 0 + 2\sin 60 + 3\sin 120 + 4\sin 180 + 5\sin 240 + 6\sin 300$$

$$= 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\sin(180-60) + 4(0) + 5\sin(180+60) + 6\sin(360-300)$$

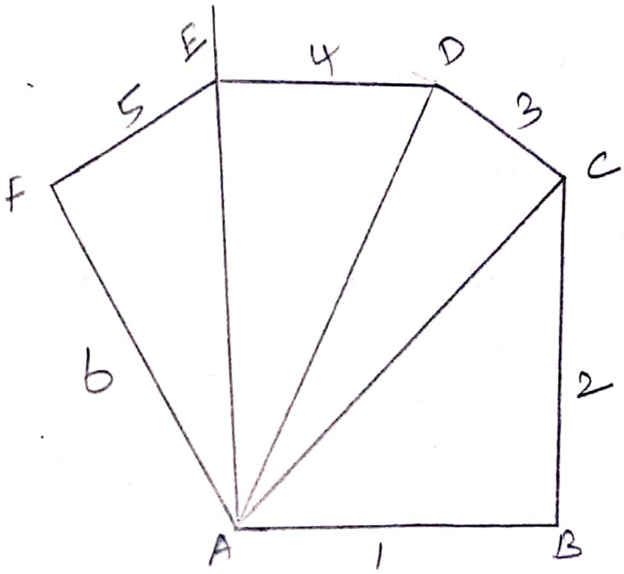
$$Y = \sqrt{3} + 3\sin 60 - 5\sin 60 - 6\sin 60$$

$$= \sqrt{3} + 3\frac{\sqrt{3}}{2} - 5\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$

$$y = -3\sqrt{3}$$



$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$= (-3)^2 + (-3\sqrt{3})^2$$

$$= 9 + 9 \times 3$$

$$R^2 = 36$$

$$\therefore R = 6$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{-3\sqrt{3}}{-3}\right)$$

$$= \tan^{-1}\sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad (\text{or})$$

$$\theta = 30^\circ$$

(6) ஒருதள விசைகள் சமநிலையில் இருப்பதற்கான தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனையைக் காண்க.

Solution:-

Necessary condition:-

ஒருதள விசைகளின் அமைப்பு ஒரு துகளில் செயல்படுவதாகக் கொள்வோம்.

ஒருதள விசைகளின் அமைப்பை தொகுக்கும் பொழுது ஒரு புள்ளி O-வில் அமைந்துள்ள தொகுபயன் விசை R எனவும் G திருப்புத் திறனுள்ள ஒரு சுழலிணையாக மாறுகிறது எனக் கொள்வோம்.

G ஆனது O வைப் பொறுத்து விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் கூடுதல் மற்றும் Ox, Oy வழியே விசைகளின் கூறுகளின் இயற்கணித கூடுதல் X, Y என்க.

தொகுபயன் விசை $R^2 = X^2 + Y^2$

இந்த அமைப்பு சமநிலையில் இருக்க இந்த தொகுபயன் விசை R சுழலிணைக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். ஆனால் ஒரு விசை ஒரு சுழலிணையை சமப்படுத்த முடியாது. எனவே, $X = 0$, $Y = 0$ ஆக வேண்டும்.

அதாவது,

$X = 0$, $Y = 0$ மற்றும் $R = 0$ என இருக்க வேண்டும்.

Sufficient Condition:-

$X = 0$, $Y = 0$ மற்றும் $G = 0$ என எடுத்துக் கொள்க.

ஒருதள விசைகளின் அமைப்பு சமநிலையில் இருக்கும் என நிறுவ வேண்டும்.

ஒருதள விசைகளின் அமைப்பை ஒரு புள்ளி வழியாகச் செயல்படும் ஒரு விசை அல்லது ஒரு திருப்புத்திறனுள்ள ஒரு சுழலிணையாக குறைக்கலாம். இதிலிருந்து $X = 0$ மற்றும் $Y = 0$.

எனவே $R = 0$. மேலும் $G = 0$

இதிலிருந்து, ஒருதள விசைகளின் அமைப்பு சமநிலையில் உள்ளது.

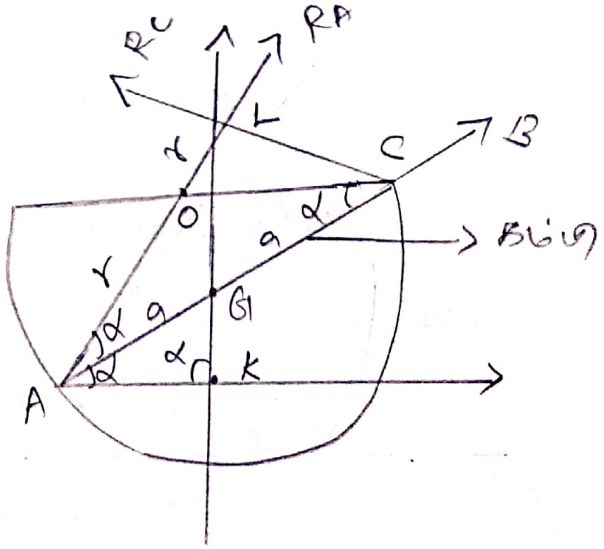
(7) $2a$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான கம்பு r ஆரம் கொண்ட ஒரு வழுவழுப்பான அரைக்கோள கிண்ணத்தினுள் அதன் ஒரு பகுதி உள்ளே உள்ளவாறும் மற்றொரு பகுதி வெளியே உள்ளவாறும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அரைக்கோளத்தின் விளிம்பு கிடைமட்டமாக உள்ளது. α என்பது கம்பு கிடைக்கோட்டுடன் ஏற்படுத்தும் கோணமெனில்

(i) $2r\cos 2\alpha = a\cos\alpha$ எனவும்

(ii) சமநிலையில் இருக்கும் போது கம்பின் நீளம் $4r$-க்கும் $2r\sqrt{2/3}$ க்கும் இடையில் உள்ளது எனவும் காட்டுக.

(iii) மேலும் α-ன் மீப்பெரு மதிப்பு காண்க.

தீர்வு:-



படத்தில் அரைக்கோளக் கிண்ணத்தில் வெட்டுமுகம் உள்ளது. AB என்பது கம்பு. C என்பது கம்பு அரைக்கோள கிண்ணத்தில் விளிம்பை தொடும் புள்ளி. G என்பது கம்பின் புவியீர்ப்பு மையம். O என்பது அரைக்கோளக் கிண்ணத்தின் மையம்.

கம்பியின் செயல்படும் விசைகள்

(i) கம்பியின் எடை W என்பது G வழியே கம்பிக்கு செங்குத்தாகச் செயல்படுகிறது.

(ii) A-யின் எதிர்தாக்கம் R_A என்பது O வழியே செயல்படுகிறது.

(iii) C-யின் எதிர்தாக்கம் R_C என்பது AB-க்கு செங்குத்தாக செயல்படுகிறது.

$\angle OAC = \angle OCA = \alpha$ என்க.

Proof (i):-

ΔAKL-ல்

$$\cos 2\alpha = \frac{AK}{AL}$$

$$\Rightarrow AK = AL \cos 2\alpha$$

$$AK = 2r\cos 2\alpha \longrightarrow (1)$$

ΔAGK-ல்

$$\cos\alpha = \frac{AK}{AG}$$

$$AK = AG\cos\alpha$$

$$AK = a\cos\alpha \longrightarrow (2)$$

from (1) and (2)

$2r\cos 2\alpha = a\cos\alpha$ என நிறுவப்பட்டது.

Proof (ii):-

$$AB \geq AC \longrightarrow (4)$$

$$AB = 2a$$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{2(2r\cos 2\alpha)}{\cos\alpha} \qquad (\because \text{(2) லிருந்து})$$

$$\Rightarrow AB = \frac{4r\cos 2\alpha}{\cos\alpha} \longrightarrow (5)$$

$\Delta\, ACL$-ல்

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AL}$$

$$\Rightarrow AC = AL\cos\alpha$$

$$AC = 2r\cos\alpha \longrightarrow (6)$$

சமன்பாடு (5), (6) களை (4)-ல் பிரதியிட

$$\frac{4r\cos 2\alpha}{\cos\alpha} \geq 2r\cos\alpha$$

$$2\cos 2\alpha \geq \cos^2\alpha$$

$$2(2\cos^2\alpha - 1) \geq \cos^2\alpha$$

$$4\cos^2\alpha - 2 \geq \cos^2\alpha$$

$$4\cos^2\alpha - \cos^2\alpha \geq 2$$

$$3\cos^2\alpha \geq 2$$

$$\cos^2\alpha \geq \frac{2}{3}$$

$$\cos\alpha \geq \sqrt{2/3}$$

$$(5) \Rightarrow AB = \frac{4r\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{4r(2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha}$$

$$AB = \frac{4r\left[2\left(\frac{2}{3}\right) - 1\right]}{\sqrt{2/3}}$$

$$= \frac{4r\left(\frac{4}{3}-1\right)}{\sqrt{2/3}}$$

$$= \frac{4r\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{2/3}}$$

$$= 4r\,\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2r\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow AB = 2r\sqrt{\frac{2}{3}} \longrightarrow (7)$$

$\cos\alpha = 1$ என சமன்பாடு (5) -ல் பிரதியிட

$$\Rightarrow AB = 4r(1)$$

$$AB = 4r \longrightarrow (8)$$

from (7) மற்றும் (8)

கம்பியின் நீளம் $4r$ க்கும் $2r\sqrt{\frac{2}{3}}$ க்கும் இடையேயுள்ளது என நிறுவப்பட்டது.

Proof (iii) :- α - ன் மீப்பெரு மதிப்பு காணல் :-

$$\cos\alpha \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha \geq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 1-\sin^2\alpha \geq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow -\sin^2\alpha \geq \frac{2}{3}-1$$

$$-\sin^2\alpha \geq -\frac{1}{3}$$

$$\sin^2\alpha \leq \frac{1}{3}$$

$$\sin\alpha \leq \sqrt{1/3}$$

$\therefore \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ என நிறுவப்பட்டது.

(8) $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ என்ற ஆறு விசைகள் ஒரு ஒழுங்கு அறுங்கோணத்தின் a பக்கமுள்ளவாறு செயல்படுகிறது. மேலும் அவ்விசைகள் சமநிலையில் உள்ளது எனில்

(i) $F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6=0$ எனவும்

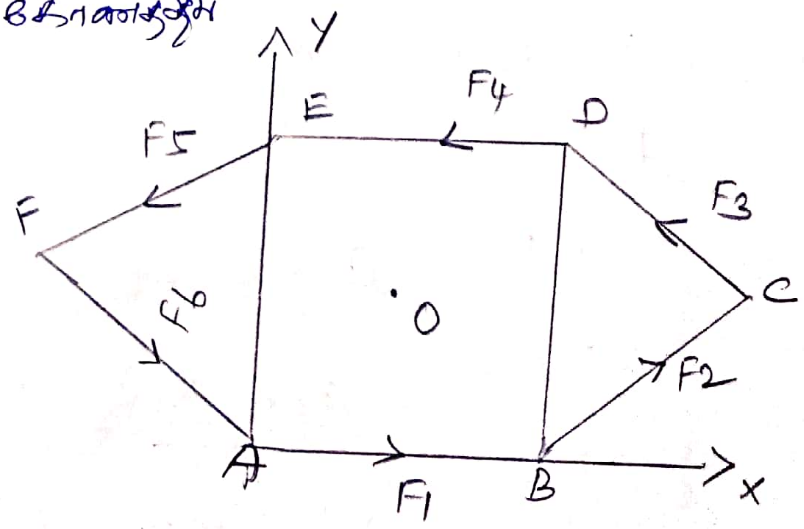
(ii) $F_1-F_4=F_3-F_6=F_5-F_2$ எனவும் நிறுவுக.

Proof (i):-

இங்கு O என்பது ஒரு ஒழுங்கு அறுங்கோணத்தின் மையம் என்க.

d என்பது ஒழுங்கு அறுங்கோணத்தின் O என்ற புள்ளியிலிருந்து அதன் தொலைவு என்க.

சமநிலையிலுள்ள அதன் திருப்புத்திறன்களின் கூடுதல் (பூஜ்ஜியம்) 0 ஆகும்.



எனவே,

$$F_1d+F_2d+F_3d+F_4d+F_5d+F_6d=0$$

$\Rightarrow (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6)d = 0$

$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 0$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

Proof (ii):-

இங்கு AB யை x அச்சாகவும் AE யை y அச்சாகவும் எடுத்து கொண்டு கிடைத்திசையிலும் செங்குத்து திசையிலும் அதன் கூறுகளை காண்போம்.

$$X = R\cos\theta = F_1\cos 0 + F_2\cos 60 + F_3\cos 120 + F_4\cos 180 + F_5\cos 240 + F_6\cos 300 = 0$$

$$= F_1(1) + F_2\left(\tfrac{1}{2}\right) + F_3\cos(180-60) + F_4(-1) + F_5\cos(180+60) + F_6(\cos 360-60) = 0$$

$$X = F_1 + F_2\tfrac{1}{2} + F_3(-\cos 60) - F_4 + F_5(-\cos 60) + F_6\cos 60 = 0$$

$$X = F_1 + F_2\tfrac{1}{2} - F_3\tfrac{1}{2} - F_4 - F_5\tfrac{1}{2} + F_6\tfrac{1}{2} = 0$$

$$X = F_1 - F_4 + (F_2 - F_3 + F_6 - F_5)\tfrac{1}{2} = 0 \longrightarrow (1)$$

$$Y = F_1\sin 0 + F_2\sin 60 + F_3\sin 120 + F_4\sin 180 + F_5\sin 240 + F_6\sin 300 = 0$$

$$Y = F_1(0) + F_2\frac{\sqrt{3}}{2} + F_3\sin(180-60) + F_4(0) + F_5\sin(180+60) + F_6\sin(360-60) = 0$$

$$Y = F_2\frac{\sqrt{3}}{2} + F_3\sin 60 + F_5(-\sin 60) + F_6(-\sin 60) = 0$$

$$Y = F_2\frac{\sqrt{3}}{2} + F_3\frac{\sqrt{3}}{2} - F_5\frac{\sqrt{3}}{2} - F_6\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{2}(F_2 + F_3 - F_5 - F_6) = 0$$

$$\Rightarrow Y = F_2 + F_3 - F_5 - F_6 = 0$$

$\Rightarrow F_3 - F_6 = F_5 - F_2 \longrightarrow$ (2)

சமன்பாடு (2) யை (1) -ல் பிரதியிட

(1) $\Rightarrow F_1 - F_4 + \left[F_2 - F_5 - (F_3 - F_6)\right]\frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow F_1 - F_4 + \left[F_2 - F_5 - (F_5 - F_2)\right]\frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow F_1 - F_4 + (F_2 - F_5 - F_5 + F_2)\frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow F_1 - F_4 + (2F_2 - 2F_5)\frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow F_1 - F_4 + 2(F_2 - F_5)\frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow F_1 - F_4 + F_2 - F_5 = 0$

$\Rightarrow F_1 - F_4 = F_5 - F_2$

$\therefore F_1 - F_4 = F_5 - F_2 = F_3 - F_6$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

CORE COURSE XI

STATICS

OBJECTIVE:

1. To provide the basic knowledge of equilibrium of a particle.
2. To develop a working knowledge to handle practical problems.

UNIT I

Introduction – Forces acting at a point: Triangle of forces – Resolution of force – Condition of equilibrium.

UNIT II

Parallel forces and Moments: Resultant of parallel forces – Theorems on Moments – Moment about an axis – couples.

UNIT III

Equilibrium of three forces acting on a rigid body: Conditions of equilibrium – Trigonometrical theorems and problems - Coplanar forces: Reduction of Coplanar forces – Equation of Line of action of the resultant – Conditions of equilibrium

UNIT IV

Friction: Introduction – Laws of Friction – Definitions – Equilibrium of a particle on a rough inclined plane.

UNIT V

Equilibrium of strings: Equation of the Common Catenary -Parabolic Catenary.

TEXT BOOK:

M.K.Venkataraman, Statics, Agasthiyar Publications, 17th edition, 2014.

UNIT I -Chapter1, Chapter2.
UNIT II -Chapter 3, Chapter 4.
UNIT III -Chapter 5 (Section 1-6), Chapter 6 (Section 1-12).
UNIT IV -Chapter 7 (Section 1-13) Pages: 206 – 238.
UNIT V -Chapter 9 (Section 1- 8)

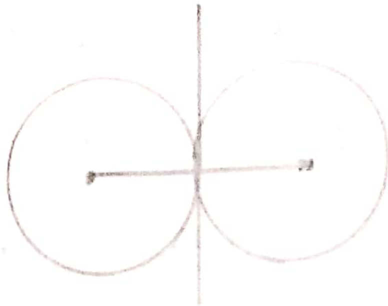
REFERENCE(S)

1. A.V.Dharmapadham, Statics, S.Viswanathan Publishers Pvt.Ltd, 2006.
2. P. Duraipandian, Laxmi Duraipandian and Muthamizh Jayapragasam, Mechanics S.Chand & Company PVT, LTD, 2014
3. S.L.Lony, Elements of Statics and Dynamics, Part-I, A.I.T.B.S.Publishers, 2007.

*****

UNIT - 4

FRICTION - உராய்வு



இரு வழுவழுப்பான பொருட்கள் ஒன்றையொன்று தொடும் போது அவற்றால் ஏற்படும் விசை தொடும் புள்ளியில் பொது செங்குத்து வழியாக இருக்கும். தொடுகோட்டு திசையில் எந்த விசையும் செயல்படாது. எனவே இரு வழுவழுப்பான பொருளின் மீது மற்றொரு பொருள் நழுவி செல்லும்படி எந்த விசையும் செயல்படாது. நடைமுறையில் எந்த பொருட்களும் வழுவழுப்பான தன்மை உடையவை அல்ல. அதாவது அவை நுண்ணளவில் சொரசொரப்பானதாக இருக்கும்.

அதாவது அதிக எடையுள்ள ஒரு பொருளை தரையில் ஒரு கிடை விசையினால் இழுக்கும் போது அப்பொருளில் ஒரு தாங்கு விசை இருப்பதை உணரலாம். இத்தாங்கு விசை தரையின் சொரசொரப்பு தன்மையை பொருத்து அமையும். இவ்விசைக்கு உராய்வு என்று பெயர்.

உராய்வு விசை Friction force

வழுவழுப்பற்ற இரு பொருட்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டு கொண்டிருக்கும் போது அவற்றின் தொடுகோட்டின் விசை பொது செங்குத்து திசையில் இவற்றால் செயல்படும் விசைகளை தவிர மற்றொரு விசையும் செயல்படும்.

தொடுகோட்டு விசையானது இரு பொருட்களும் ஒன்றின் மேல் ஒன்று நகர்வதனை தடை செய்யும். இந்த விசையை உராய்வு விசை என்கிறோம்.

நிலை உராய்வு - (Statical Friction)

ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருளை தொட்டுக் கொண்டு சமநிலையில் இருக்கும் போது அச்சமநிலை பாதிப்பு இல்லாமல் செயல்படும் விசை நிலை உராய்வு எனப்படும்.

இயக்க உராய்வு - (Dynamical Friction)

ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருளின் மீது நகர்ந்து செல்லும் வகையில் ஏற்படும் உராய்வு இயக்க உராய்வு எனப்படும்.

எல்லை உராய்வு - (Limiting Friction)

ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருளை தொடும் புள்ளியில் நகர்ந்து செல்லும் வகையில் செயல்படும் உராய்வு மீப்பெரு உராய்வாகும். இந்த மீப்பெரு உராய்வினை எல்லை உராய்வு என்கிறோம்.

உராய்வின் விதிகள்

1. இரு பொருட்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் புள்ளியில் உராய்வு விசை பொருள் நகரும் திசைக்கு எதிர்திசையில் செயற்படும்.

2. சமநிலையில் உராய்வு விசையின் அளவு பொருளின் நகர்வை தடுக்கும் வகையில் இருக்கும்.

3. எல்லை உராய்வும் செங்குத்து எதிர்தாக்கமும் மாறாத விகிதத்தில் இருக்கும். இவ்விகிதம் உராய்வு ஏற்படும் பொருள்களின் தன்மையை சார்ந்தது.

4. எல்லை உராய்வு பொருள்களின் வடிவத்தையோ, பரப்பு இடத்தையோ சார்ந்தது அல்ல. இது செங்குத்து எதிர்தாக்கத்தில் மாற்றம் இல்லாதவரை நீடிக்கும்.

இயக்க உராய்வு விதி

ஒரு பொருள் மற்றொன்றின் மீது நகர்ந்து செல்லும் போது ஏற்படும் உராய்வு விசை இயங்கும் பொருளுக்கு எதிர்திசையில் செயல்படும். இவ்வுராய்வு விசையின் அளவு தொடும்புள்ளியின் வேகத்தை சார்ந்தது அல்ல. ஆனால் உராய்வு விசைக்கும் செங்குத்து எதிர்தாக்கத்திற்கும் உள்ள விகிதம் பொருள் நகரத் துவங்கும் போது எல்லைச் சமநிலையில் இருப்பதை விட குறைவாகும்.

உராய்வு எண் -(Friction Coefficient)

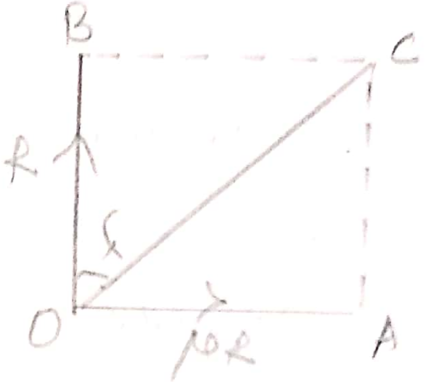
இரு பொருள்களுக்கு இடைப்பட்ட உராய்வு விசை செங்குத்து எதிர் விசையுடன் மாறாத விகிதத்தில் இருக்கும் இந்த மாறா விகிதம் உராய்வு எண்

எனப்படும். இதனை μ என குறிப்பது வழக்கம்.

$$\mu = \frac{F}{R}$$

உராய்வு கோணம் - (Angle of Friction)

எல்லைச் சமநிலையில் விளைவு விசைக்கும் செங்குத்து எதிர்த்தாக்கத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் உராய்வு கோணம் எனப்படும்.



இதனை λ எனக் குறிப்போம்.

$$\mu = \tan\lambda.$$

உராய்வுக் கூம்பு - (Cone of Friction)

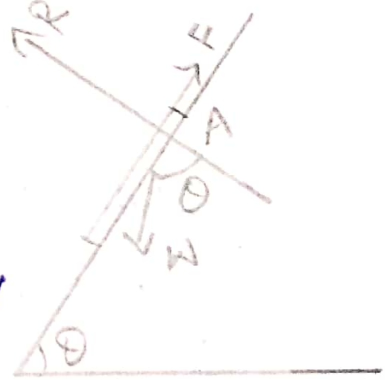
இரு பொருட்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டு எல்லைச் சமநிலையில் இருக்கும் போது தொடும் புள்ளியின் உச்சாகவும் உராய்வுக் கோணத்தை அரைஉச்சிக் கோணமாகவும் செங்குத்து எதிர்த்தாக்கத்தை அச்சாகவும் கொண்டு அமைகின்ற கூம்பிற்கு உராய்வு கூம்பு என்று பெயர்.

தேற்றம்
Theorem:

ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின் மேல் ஒரு பொருள் எல்லை சமநிலையில் இருக்குமானால் கிடைத்தளத்துடன் சாய்தளத்தின் கோணம் உராய்வு கோணத்திற்கு சமம் எனக் காட்டுக. (or)

வழுவழுப்பற்ற சாய்தளத்தில் ஒரு பொருளின் சமநிலை.

Proof:



கிடைமட்டத்துடன் θ கோணம் உள்ள ஒரு வழுவழுப்பான சாய்தளத்தின் மீது A என்ற புள்ளியில் W எடையுள்ள ஒரு பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ளது.

பொருளின் எடை W கீழ்நோக்கி செங்குத்தாக செயல்படும்.

உராய்வு விசை F சாய்தளத்திற்கு மேல்நோக்கி செயல்படும்.

செங்குத்து எதிர்விசை R தளத்திற்கு செங்குத்தாக செயல்படும்.

விசைகளை சாய்தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் இணையாகவும் பிரிக்க.

$$R = W\cos\theta$$

$$F = W\sin\theta$$

$$\frac{F}{R} = \tan\theta$$

எப்பொழுதும் $\frac{F}{R} < \mu$ ஆகும்.

எனவே சமநிலையில் $\tan\theta < \mu$. அதாவது

சமநிலையில் $\tan\theta < \tan\lambda$

இங்கு λ என்பது உராய்வு கோணம்.

மேலும் $\theta = \lambda$ எனும் போது

$$\frac{F}{R} = \tan\lambda = \mu.$$

இந்நிலை எல்லைச் சமநிலை எனப்படும். இந்நிலையில் பொருள் சாய்தளத்தில் கீழ்நோக்கி வேகமாக இறங்க முற்படும். ஒரு பொருள் அழுத்தமற்ற சாய்தளத்தின் மீது வைக்கப்பட்டு அதன் எடையின் காரணமாகவும் செங்குத்து எதிர் தாக்கத்தின் காரணமாகவும் கீழ்நோக்கி இறங்கும் போது சாய்தளத்தின் சாய்வு கோணம் அதன் உராய்வு கோணத்திற்கு சமமாகும்.

அதாவது சாய்தளத்தின் சாய்வு கோணம் $\lambda = \tan^{-1}(\mu)$ எனும் போது பொருள் கீழ்நோக்கி நகரத் துவங்கும்.

ஒரு அழுத்தமற்ற சாய்தளத்தின் அமைதிக் கோணம் என்பது உராய்வு கோணத்திற்கு சமமாகும்.

Theorem

வழவழப்பற்ற சாய்தளத்தின் மீது ஒரு சாய்தளத்திற்கு இணையான ஒரு விசையினால் அதன் மீது உள்ள பொருளின் மீது ஏற்படும் சமநிலை. (or)

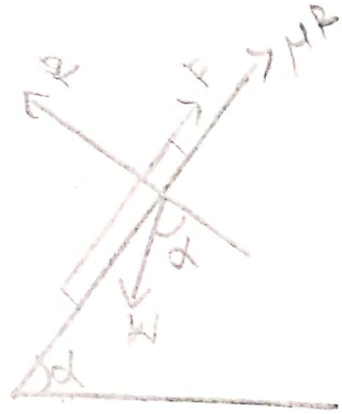
ஒரு பொருள் சொரசொரப்பான உராய்வு கோணத்தை விட அதிகமான சாய்வுள்ள தளத்தின் மேற்பரப்பு சரிவுக் கோட்டுடன் இணையான விசையினால் சமநிலை நிலையில் உள்ளது எனில் எந்த எல்லைகளுக்கு இடையில் விசை இருக்க வேண்டும் என்பதை காண்.

Proof :-

சாய்தளத்தின் சாய்வுக் கோணம் α என்க.

பொருளின் எடை W என்க.

செங்குத்து எதிர்தாக்கம் R என்க.



Case (ii) :-

பொருள் சாய்தளத்தின் கீழ்நோக்கி இறங்குகிறது என்க. அப்போது உராய்வு விசை μR மேல்நோக்கி செயல்படும். பொருளை சமநிலையில் வைத்திருப்பதற்கு தேவையான விசை P என்க.

விசைகளை சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும் செங்குத்தாகவும் பிரிக்க.

$$R = W\cos\alpha \longrightarrow (1)$$

$$P + \mu R = W\sin\alpha \longrightarrow (2)$$

சமன்பாடு (1) ஐ (2)-ல் பிரதியிட

$$P + \mu (W\cos\alpha) = W\sin\alpha$$

$$P = W\sin\alpha - \mu W\cos\alpha$$

$$P = W(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$\mu = \tan\lambda$ என்க.

$$\Rightarrow \quad P = W(\sin\alpha - \tan\lambda\cos\alpha)$$

$$= W\left(\sin\alpha - \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\cos\alpha\right)$$

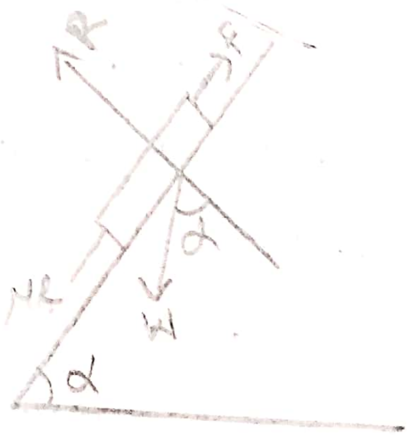
$$= \frac{W}{\cos\lambda}(\sin\alpha\cos\lambda - \sin\lambda\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad P_1 = \frac{W}{\cos\lambda}\left(\sin(\alpha-\lambda)\right)$$

$\alpha > \lambda$ என்பதால் P_1 மிகை மதிப்புடையது.

Case (ii) :—

பொருள் சாய்தளத்தில் மேல்நோக்கி நகருகின்றது என்க. உராய்வு விசை μR சாய்தளத்தில் கீழ்நோக்கி செயல்படும் பொருள் ஓய்வு நிலையில் இருப்பதற்கு தேவையான விசையை P என்க.



விசைகளை சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும் செங்குத்தாகவும் பிரிக்க.

$$R = W\cos\alpha \longrightarrow (3)$$

$$P - \mu R = W\sin\alpha \longrightarrow (4)$$

சமன்பாடு (3)ஐ (4)-ல் பிரதியிட

$$P - \mu(W\cos\alpha) = W\sin\alpha$$

$$P = W\sin\alpha + \mu W\cos\alpha$$

$$= W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$\mu = \tan\lambda$ என்க.

$$\Rightarrow P = W(\sin\alpha + \tan\lambda\cos\alpha)$$

$$= W\left(\sin\alpha + \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\cos\alpha\right)$$

$$= \frac{W}{\cos\lambda}(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda)$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{W}{\cos\lambda}(\sin(\alpha+\lambda))$$

$P > P_2$ எனில் சாய்தளத்தின் மீது பொருள் மேல் நோக்கி நகரும். P_2 என்பது P-ன் எல்லை மதிப்பாகும். ஏனெனில் பொருளை மேல்நோக்கி நகராமல் இருப்பதற்கு இவ்விசை உதவுகிறது.

$P < P_1$ எனில் சாய்தளத்தின் மீது பொருள் கீழ் நோக்கி நகரும். P-ன் மதிப்பு P_1 மற்றும் P_2 க்கு இடையில் அமையும் போது பொருள் சமநிலையில் உள்ளது.

எனவே சமநிலையில் விசை P-ன் மதிப்புகள்

$$\frac{W}{\cos\lambda}\sin(\alpha-\lambda), \quad \frac{W}{\cos\lambda}\sin(\alpha+\lambda)$$

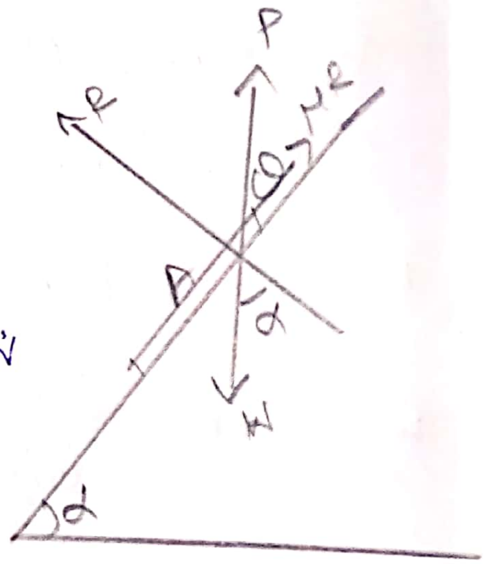
இவற்றிற்கிடையில் இருக்கும்.

Theorem :-

வழுவழுப்பற்ற சாய்தளத்திலுள்ள பொருள் மீது எந்தவொரு விசையினாலும் ஏற்படும் சமநிலை (or)

W எடையுள்ள பொருள் α கோண சரிவில் உள்ள வழுவழுப்பற்ற தளத்தின் மீது P என்னும் விசையின் இயக்கத்தால் தளத்துடன் θ கோணத்தை உண்டாக்கும் திசையின் மேல்நோக்கி ஓய்வு நிலையில் உள்ளது. உராய்வு கோணம் λ எனில் ஓய்வு நிலையில் P-யை காண்க.

Proof :-



ஒரு வழுவழுப்பற்ற சாய்தளத்தின் மீது ஒரு பொருள் சாய்தளத்துடன் θ கோண சாய்வில் உள்ள ஒரு விசையினால் சமநிலையில் உள்ளது.

சாய்தளத்தில் W எடையுள்ள பொருள் A என்ற புள்ளியில் உள்ளது. இப்பொருளின் மீது சாய்தளத்துடன் θ கோணச்சாய்வு இருக்கும்படி விசை P மேல்நோக்கிச் செயல்படுகிறது. R-என்பது அதன் செங்குத்து எதிர்தாக்கம்.

Case (i) :-

பொருள் கீழ்நோக்கி இறங்குகிறது என்க. இப்போது அதன் உராய்வு விசை μR மேல்நோக்கி செயல்படும். சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும், செங்குத்தாகவும் அதன் கூறுகளை பிரிக்க.

$$W\cos\alpha = R + P\sin\theta \longrightarrow (1)$$

$$W\sin\alpha = \mu R + P\cos\theta \longrightarrow (2)$$

$$(1) \Rightarrow R = W\cos\alpha - P\sin\theta \longrightarrow (3)$$

இப்போது (3) -யை (2)-ல் பிரதியிட

$$W\sin\alpha = \mu(W\cos\alpha - P\sin\theta) + P\cos\theta$$

$$W\sin\alpha - \mu W\cos\alpha = P\cos\theta - \mu P\sin\theta$$

$$W(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = P(\cos\theta - \sin\theta)$$

$\mu = \tan\lambda$ என்க.

$$W(\sin\alpha - \tan\lambda\cos\alpha) = P(\cos\theta - \tan\lambda\sin\theta)$$

$$W\left(\sin\alpha - \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\cos\alpha\right) = P\left(\cos\theta - \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\sin\theta\right)$$

$$W\frac{(\sin\alpha\cos\lambda - \sin\lambda\cos\alpha)}{\cos\lambda} = \frac{P(\cos\theta\cos\lambda - \sin\lambda\sin\theta)}{\cos\lambda}$$

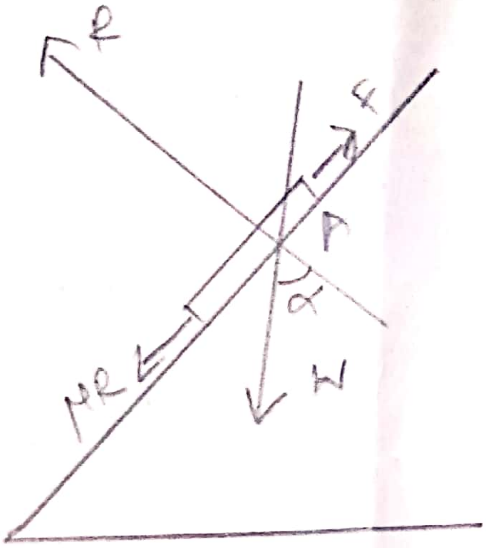
$$\Rightarrow W\sin(\alpha-\lambda) = P\cos(\lambda+\theta)$$

$$\Rightarrow P = \frac{W\sin(\alpha-\lambda)}{\cos(\lambda+\theta)} \longrightarrow (4).$$

P-ன் மதிப்பை P_1 எனக் கொள்வோம்.

$$P_1 = \frac{W\sin(\alpha-\lambda)}{\cos(\lambda+\theta)}$$

Case (ii) :-



பொருளின் விசை P-யானால் மேல்நோக்கி நகர்கிறது என்க. அப்போது உராய்வு விசை μR கீழ்நோக்கிச் செயல்படும். சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும் செங்குத்தாகவும் விசைகளை பிரிக்க.

$$W \cos\alpha = R + P\sin\theta \longrightarrow (5)$$

$$W \sin\alpha = P\cos\theta - \mu R \rightarrow (6)$$

$$(5) \Rightarrow \quad R = W\cos\alpha - P\sin\theta \rightarrow (7)$$

சமன்பாடு (7)-ஐ (6)-ல் பிரதியிட

$$W\sin\alpha = P\cos\theta - \mu(W\cos\alpha - P\sin\theta)$$

$$W\sin\alpha + \mu W\cos\alpha = P\cos\theta + \mu P\sin\theta$$

$$W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = P(\cos\theta + \mu\sin\theta)$$

$\mu = \tan\lambda$ என்க.

$$W(\sin\alpha + \tan\lambda\cos\alpha) = P(\cos\theta + \tan\lambda\sin\theta)$$

$$W\left(\sin\alpha + \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\cos\alpha\right) = P\left(\cos\theta + \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\sin\theta\right)$$

$$W\left(\frac{\sin\alpha\cos\lambda + \sin\lambda\cos\alpha}{\cos\lambda}\right) = P\left(\frac{\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda}{\cos\lambda}\right)$$

$$w \sin(\alpha+\lambda) = P \cos(\theta-\lambda)$$

$$\Rightarrow P = \frac{w \sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)} \rightarrow (8)$$

P-ன் மதிப்பை P_2 எனக் கொள்வோம்.

$$P_2 = \frac{w \sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)}$$

சாய்தளத்தின் மீது பொருள் சமநிலையில் இருப்பதற்கு விசையின் எல்லை மதிப்புகள் P_1 மற்றும் P_2 ஆகும்.

கம்பி மற்றும் ஏணிகளின் சமநிலைகள்

ஒரு ஏணியின் புவியீர்ப்பு மையம் $a:b$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. உராய்வுக் கெழு μ உள்ள கிடைத்தளத்தில் ஏணியின் கீழ்முனை உள்ளது. உராய்வுக் கெழு μ' உள்ள செங்குத்து சுவற்றில் ஏணியின் மேல்முனை உள்ளது. சமநிலையில் ஏணிக்கும் கிடைத்தளத்துக்கும் இடைப்பட்ட கோணம்

$$\tan^{-1}\left[\frac{a-b\mu\mu'}{(a+b)\mu}\right]$$ என நிறுவுக.

Proof:-

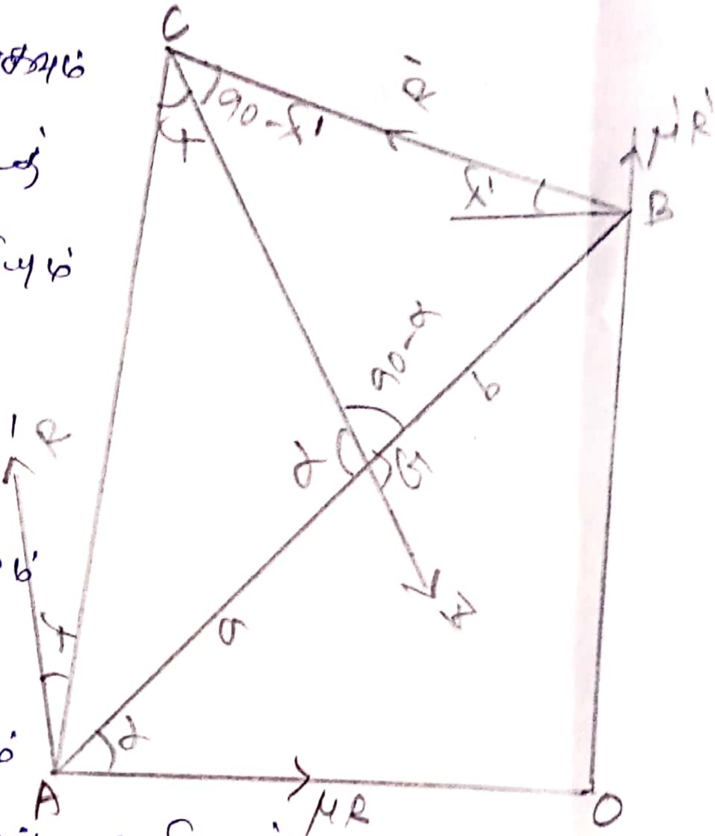
படத்தில் AB என்பது ஏணி.

இது $a:b$ என்றவாறு பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

OB - என்பது சுவர்.

ஏணியின் கீழ்முனையின் எதிர்தாக்கம் R தரையிலிருந்து செங்குத்தாகவும் உராய்வு விசை μR கிடைத் திசையில் சுவற்றை நோக்கியும் செயல்படுகிறது.

B-ன் எதிர்தாக்கம் R' சுவற்றிற்கு செங்குத்தாகவும் உராய்வு விசை μ'R' சுவற்றிற்கு மேல் நோக்கியும் செயல்படுகிறது. G-யில் ஏணியின் எடை W கீழ்நோக்கி செங்குத்தாக செயல்படுகிறது. G-என்பது அதன் புவியீர்ப்பு மையமாகும்.



△ AGB-ன் திரிகோண வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்த,

$$(AG+GB)\cot(90-\alpha) = AG\cot\lambda - GB\cot(90-\lambda')$$

$$(AG+GB)\tan\alpha = a\cot\lambda - b\tan\lambda'$$

$$(a+b)\tan\alpha = \frac{a}{\mu} - b\mu' \qquad \because \mu = \tan\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\cot\lambda}$$

$$\Rightarrow (a+b)\tan\alpha = \frac{a - b\mu\mu'}{\mu}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{a-b\mu\mu'}{(a+b)\mu}$$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\left[\frac{a-b\mu\mu'}{(a+b)\mu}\right]$$

(2) சீரான ஏணியின் முனைகள் சம உராய்வுடைய கிடைத்தளத்திற்கு செங்குத்து சுவற்றிலும் வைக்கப்பட்டுள்ளது எனில் $\theta = 90-2\lambda$ என நிறுவுக. இங்கு θ என்பது தரைக்கும் ஏணிக்கும் இடைப்பட்ட கோணம். λ என்பது உராய்வு கோணம் எனில்

$$\tan\theta = \frac{1-\mu\mu'}{2\mu}.$$

Proof:

$$\tan\theta = \frac{1-\mu\mu'}{2\mu} \qquad \because \mu = \tan\lambda$$

$\mu' = \mu$ என்க.

$$\because \tan 2\lambda = \frac{2\tan\lambda}{1-\tan^2\lambda}$$

$$\tan\theta = \frac{1-\mu^2}{2\mu} \qquad \frac{1}{\tan 2\lambda} = \frac{1-\tan^2\lambda}{2\tan\lambda}$$

$$\tan\theta = \frac{1-\tan^2\lambda}{2\tan\lambda}$$

$$= \frac{1}{\tan 2\lambda}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \cot 2\lambda$$

$$\tan\theta = \tan(90-2\lambda)$$

$$\therefore \theta = 90-2\lambda$$

(3) சம உராய்வுடைய கிடைத்தளத்தில் ஒரு நுனியும் சுவற்றில் ஒரு நுனியும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. சீரான ஏணி சுவற்றுடன் θ கோண சாய்வில் இருந்தால் $\tan\theta = \dfrac{2\mu}{1-\mu^2}$ என நிறுவுக.

Proof:-

சுவற்றுக்கும் ஏணிக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ என்பதால் கிடைத்தளத்திற்கும் ஏணிக்கும்

இடைப்பட்ட கோணம் 90-θ.

முந்தைய கணக்கின்படி

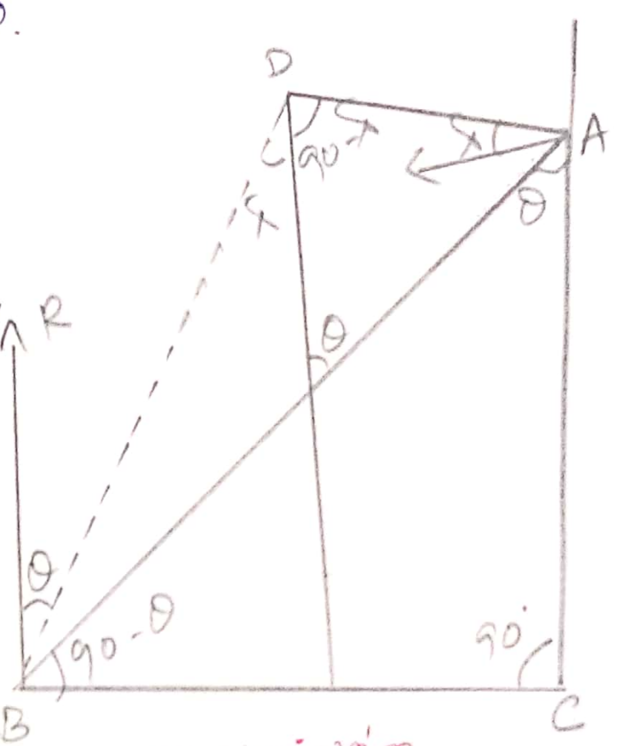
$$\tan\theta = \frac{1-\mu^2}{2\mu}$$

இங்கு θ = 90-θ என்பதால்

$$\tan(90-\theta) = \frac{1-\mu^2}{2\mu}$$

$$\cot\theta = \frac{1-\mu^2}{2\mu}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{2\mu}{1-\mu^2}$$

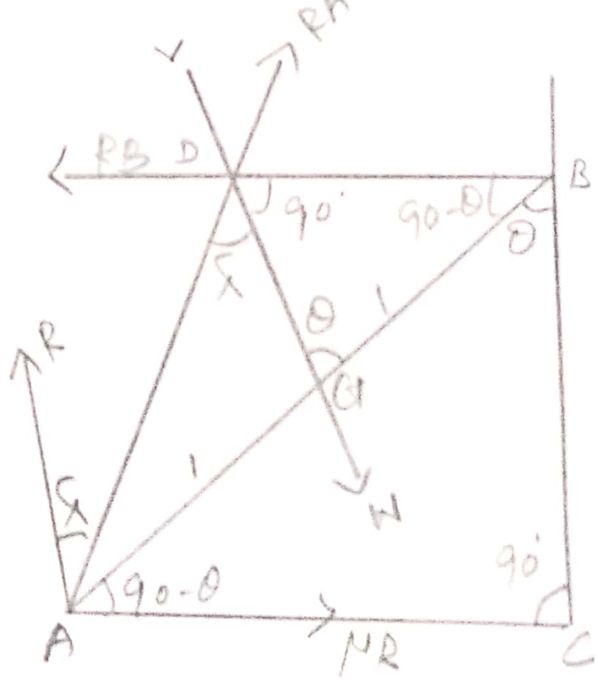


(4). ஒரு சீரான ஏணியின் கீழ்முனை வழுவழுப்பற்ற கிடைத்தளத்திலும் மேல்முனை வழுவழுப்பான செங்குத்து சுவற்றிலும் உள்ளது. எனில் சமநிலையில் ஏணிக்கும் சுவற்றுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $\tan\theta = 2\mu$ (or) $\theta = \tan^{-1}(2\mu)$ என நிறுவுக

Proof:

இங்கு AC என்பது கிழ்த்தளமாகவும் BD என்பதை மேல்தளமாகவும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

ஏணியானது சுவரோடு ஏற்படுத்தும் கோணம் θ எனவும் தரையின் A என்ற புள்ளியின் ஏற்படுத்தும் உராய்வு கோணம் λ எனவும் எடுத்துக் கொள்வோம். G என்பது புவியீர்ப்பு மையம்.



W என்பது கீழ்நோக்கி செயற்படும் பொருளின் நிறையாகும். R என்பது A என்ற புள்ளியின் மறுதாக்கம். μR என்பது கிடைத்தளத்தின் சுவற்றை நோக்கி செயற்படும் உராய்வு விசையாகும்.

ΔAGB-ல் முதல் திரிகோண தேற்றத்தை பயன்படுத்த,

$$(AG+GB)\cot\theta = AG\cot\lambda - GB\cot 90$$

$$(1+1)\cot\theta = \cot\lambda - \cot 90^{\circ} \qquad \because \tan 90 = \infty$$

$$2\cot\theta = \cot\lambda \qquad \cot 90 = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$2\cot\theta = \frac{1}{\mu} \qquad \because \mu = \tan\lambda$$

$$2\mu = \frac{1}{\cot\theta} \qquad \frac{1}{\mu} = \cot\lambda$$

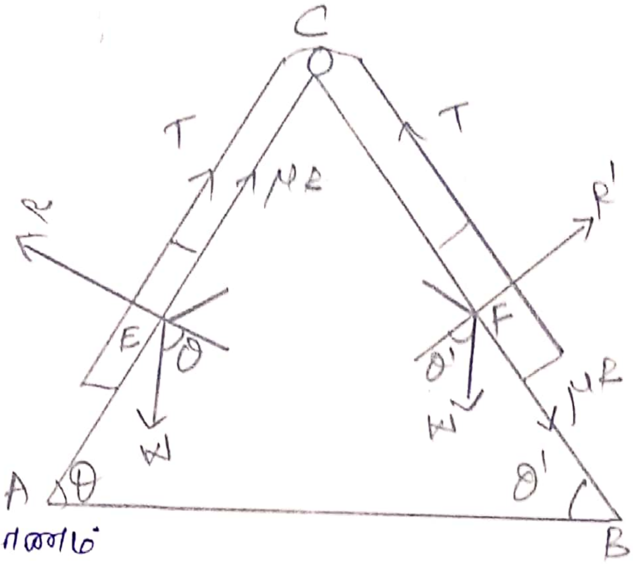
$$\Rightarrow \tan\theta = 2\mu$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}(2\mu)$$

(5) கிடைத்தளத்துடன் θ, θ' என்ற சாய்வு கோணங்கள் உள்ள இரு சாய்தளங்களின் ஒவ்வொன்றிலும் W, W என்ற சம எடையுள்ள பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அவை சாய்தளங்களின் உச்சியிலுள்ள வழுவழுப்பான கப்பி வழியாக செல்லும் ஒரு கயிற்றால் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த எடைகள் சமநிலையின் எல்லையில் இருக்கும் பொழுது உராய்வுக் கெழுவானது $\frac{\sin\theta - \sin\theta'}{\cos\theta + \cos\theta'}$ என்பதற்கு சமம் என நிறுவுக.

Proof:-

படத்தில் C என்பது கப்பியைக் குறிக்கும்.



கிடைத்தளத்துடன் A என்ற புள்ளி உருவாக்கும் கோணம் θ எனவும் B என்ற புள்ளி உருவாக்கும் கோணம் θ' எனவும் கொள்வோம்.

E என்ற புள்ளியை θ கோணம் உருவாக்கும் நிலைமத்தின் புள்ளி எனவும் F என்பதை θ' கோணம் உருவாக்கும் நிலைமத்தின் புள்ளி எனவும் கொள்க. இங்கு E என்ற புள்ளியில் R என்பது அதன் எதிர்தாக்கம் μR என்பது உராய்வுக் கூறு E என்ற புள்ளியில் மேல்நோக்கிச் செயல்படுகிறது.

F என்ற புள்ளியில் R' என்பது அதன் எதிர்தாக்கம் μR என்பது உராய்வுக் கூறு கீழ்நோக்கி செயல்படுகிறது.

E என்ற புள்ளியில் கிடைநிலையாகவும் செங்குத்து நிலையாகவும் அதன் கூறுகளை பிரிக்க.

$$R = W\cos\theta \longrightarrow (1)$$

$$T + \mu R = W\sin\theta \longrightarrow (2)$$

சமன்பாடு (1) ஐ (2)-ல் பிரதியிட

$$T + \mu W\cos\theta = W\sin\theta$$

$$T = W\sin\theta - \mu W\cos\theta \longrightarrow (3)$$

F என்ற புள்ளியில் செங்குத்து நிலையாகவும் கிடை நிலையாகவும் அதன் கூறுகளை பிரிக்க.

$$R' = W\cos\theta' \longrightarrow (4)$$

$\Rightarrow \quad T - \mu R' = W\sin\theta' \longrightarrow (5)$

சமன்பாடு (4) ஐ (5) இல் பிரதியிட

$$T - \mu W\cos\theta' = W\sin\theta'$$

$$T = W\sin\theta' + \mu W\cos\theta' \longrightarrow (6)$$

சமன்பாடு (3), (6) ஐ ஒப்பிட

$$W\sin\theta - \mu W\cos\theta = W\sin\theta' + \mu W\cos\theta'$$

$$\Rightarrow \sin\theta - \mu\cos\theta = \sin\theta' + \mu\cos\theta'$$

$$\Rightarrow \sin\theta - \sin\theta' = \mu\cos\theta + \mu\cos\theta'$$

$$\Rightarrow \sin\theta - \sin\theta' = \mu(\cos\theta + \cos\theta')$$

$$\therefore \mu = \frac{\sin\theta - \sin\theta'}{\cos\theta + \cos\theta'}$$

$$\Rightarrow T - \mu R' = W \sin\theta' \rightarrow (5)$$

சமன்பாடு (4) ஐ (5)ல் பிரதியிட

$$T - \mu W \cos\theta' = W \sin\theta'$$

$$T = W \sin\theta' + \mu W \cos\theta' \rightarrow (6)$$

சமன்பாடு (3), (6) ஐ ஒப்பிட

$$W \sin\theta - \mu W \cos\theta = W \sin\theta' + \mu W \cos\theta'$$

$$\Rightarrow \sin\theta - \mu \cos\theta = \sin\theta' + \mu \cos\theta'$$

$$\Rightarrow \sin\theta - \sin\theta' = \mu \cos\theta + \mu \cos\theta'$$

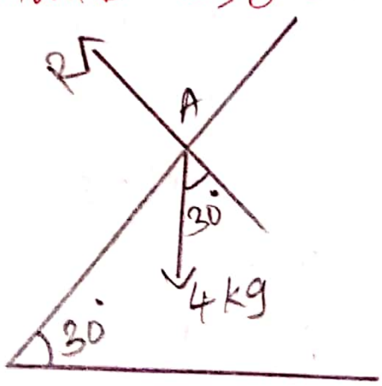
$$\Rightarrow \sin\theta - \sin\theta' = \mu (\cos\theta + \cos\theta')$$

$$\therefore \mu = \frac{\sin\theta - \sin\theta'}{\cos\theta + \cos\theta'}$$

Note:-

h உயரத்தில் உள்ள ஏணியானது தரையோடு ஏற்படுத்தும் கோணம் θ எனில் $\tan\theta = \frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}}$

6. 4 kg எடையுள்ள ஒரு பொருள் சாய்வுகோணம் 30° உள்ள சாய்தளத்தின் மீது வைக்கப்பட்டு சமநிலையில் உள்ளது எனில் அதன் உராய்வுக் கோணம் மற்றும் எதிர்தாக்கத்தினை காண்க.



Proof :-

பொருள் சாய்வுக் கோணம் 30° கோணமுள்ள சாய்தளத்தின் மீது வைக்கப்பட்டு எல்லை சமநிலையில் உள்ளது.

எனவே,

$$\lambda = \alpha = 30^\circ$$

உராய்வுக் கோணம் $\mu = \tan\lambda$

$$= \tan 30^\circ$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

எதிர்தாக்கம் $R = W\cos\alpha$

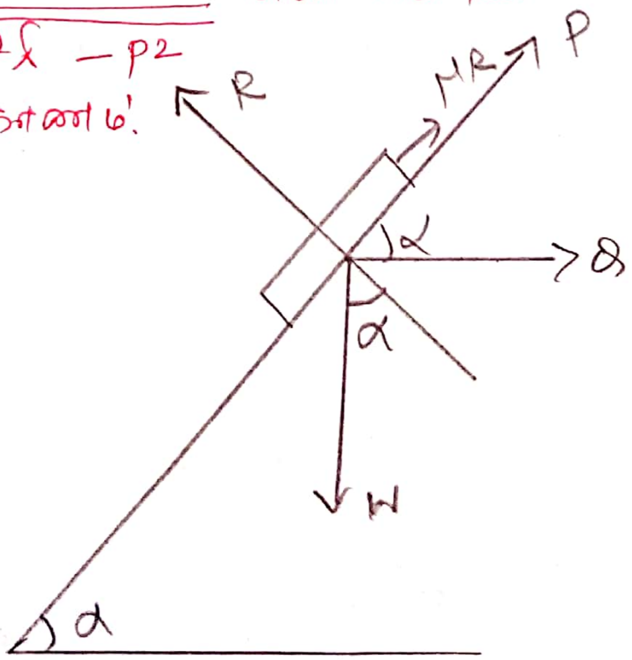
$$= 4\cos 30^\circ$$

$$R = 4\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore R = 2\sqrt{3}\ \text{kg}.$$

அழுத்தமற்ற சாய்தளத்தின் மேலுள்ள ஒரு பொருளானது சாய்தளத்திற்கு இணையான விசை P அல்லது கிடைத்திசையில் செயல்படும் விசை Q இவற்றால் தாங்கப்படுகிறது எனில் பொருளின் எடை $\dfrac{PQ}{\sqrt{Q^2\sec^2\lambda - P^2}}$ என நிறுவுக.

இங்கு λ என்பது உராய்வுக் கோணம்.



__Proof:-__

பொருளின் எடை W என்க. சாய்தளத்தின் சாய்வுக் கோணம் α என்க. பொருள் சாய்தளத்தின் கீழ்நோக்கி நகரும் போது உராய்வு விசை μR சாய்தளத்தின் மேல் நோக்கி செயல்படும். இந்நிலையில் கிடைவிசை Q பொருளை அந்நிலையில் வைத்திருக்கும்.

விசைகளை சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும் செங்குத்தாகவும் பிரிக்க.

$$\mu R + Q\cos\alpha = W\sin\alpha \longrightarrow (1)$$

$$R = W\cos\alpha + Q\sin\alpha \longrightarrow (2)$$

சமன்பாடு (2)-ஐ (1)-ல் பிரதியிட

$$\mu W\cos\alpha + \mu Q\sin\alpha + Q\cos\alpha = W\sin\alpha$$

$$\mu W\cos\alpha + Q\cos\alpha = W\sin\alpha - \mu Q\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha\,(Q + \mu W) = \sin\alpha\,(W - \mu Q) \longrightarrow (3)$$

W எடையுள்ள பொருளை சாய்தளத்திற்கு இணையாக செயல்படும் விசை P தாங்குகிறது என்றால்

$$P = \frac{W}{\cos\lambda}\left(\sin(\alpha-\lambda)\right)$$

$$\Rightarrow P = \frac{W}{\cos\lambda}\left(\sin\alpha\cos\lambda - \cos\alpha\sin\lambda\right) \longrightarrow (4)$$

திரிகோண விதிப்பாட்டை பயன்படுத்தி

$$(3) \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{W-\mu Q} = \frac{\sin\alpha}{Q+\mu W} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}{\sqrt{(W-\mu Q)^2 + (Q+\mu W)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{W^2 - 2WPQ + \mu^2 Q^2 + Q^2 + \mu^2 W^2 + 2W\mu Q}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{W^2(\mu^2+1) + Q^2(\mu^2+1)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\mu^2+1)(W^2+Q^2)}}$$

$\because \mu = \tan\lambda$

$\because 1+\tan^2\lambda = \sec^2\lambda$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sec^2\lambda\,(W^2+Q^2)}}$$

$$\frac{\cos\alpha}{(W-\mu Q)} = \frac{\sin\alpha}{(Q+\mu W)} = \frac{1}{\sec\lambda\sqrt{W^2+Q^2}}$$

முதல் மற்றும் மூன்றாவது விகிதங்களிலிருந்து

$$\frac{\cos\alpha}{W-\mu Q} = \frac{1}{\sec\lambda\sqrt{W^2+Q^2}}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{W-\mu Q}{\sec\lambda\sqrt{W^2+Q^2}}$$

இரண்டு மற்றும் மூன்றாவது விகிதங்களிலிருந்து

$$\frac{\sin\alpha}{Q+\mu W} = \frac{1}{\sec\lambda\sqrt{W^2+Q^2}}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{Q+\mu W}{\sec\lambda\sqrt{W^2+Q^2}}$$

$\sin\alpha$ மற்றும் $\cos\alpha$ -ன் மதிப்பை சமன்பாடு (4)-ல் பிரதியிட

$$P = \frac{W}{\cos\lambda}\left\{\frac{(Q+\mu W)\cos\lambda}{\sec\lambda\sqrt{W^2+Q^2}} - \frac{(W-\mu Q)\sin\lambda}{\sec\lambda\sqrt{W^2+Q^2}}\right\}$$

$$= \frac{W}{\cos\lambda \sec\lambda \sqrt{W^2+Q^2}} \{Q\cos\lambda + \mu W\cos\lambda - W\sin\lambda + \mu Q\sin\lambda\}$$

$$= \frac{W}{\sqrt{W^2+Q^2}} \{Q(\cos\lambda + \mu\sin\lambda) + W(\mu\cos\lambda - \sin\lambda)\}$$

$$\Rightarrow P = \frac{W}{\sqrt{W^2+Q^2}} \left\{Q\left(\cos\lambda + \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\sin\lambda\right) + W\left(\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\cos\lambda - \sin\lambda\right)\right\}$$

$$= \frac{W}{\sqrt{W^2+Q^2}} \left\{\frac{Q(\cos^2\lambda + \sin^2\lambda)}{\cos\lambda} + W(\sin\lambda - \sin\lambda)\right\}$$

$$= \frac{W}{\sqrt{W^2+Q^2}} \left\{\frac{Q(1)}{\cos\lambda} + W(0)\right\}$$

$$= \frac{W}{\sqrt{W^2+Q^2}} \left[\frac{Q}{\cos\lambda}\right]$$

$$P = \frac{W}{\sqrt{W^2+Q^2}} Q\sec\lambda$$

$$\Rightarrow P^2 = \frac{W^2Q^2\sec^2\lambda}{W^2+Q^2}$$

$$P^2(W^2+Q^2) = W^2Q^2\sec^2\lambda$$

$$P^2W^2 + P^2Q^2 = W^2Q^2\sec^2\lambda$$

$$P^2Q^2 = W^2Q^2\sec^2\lambda - P^2W^2$$

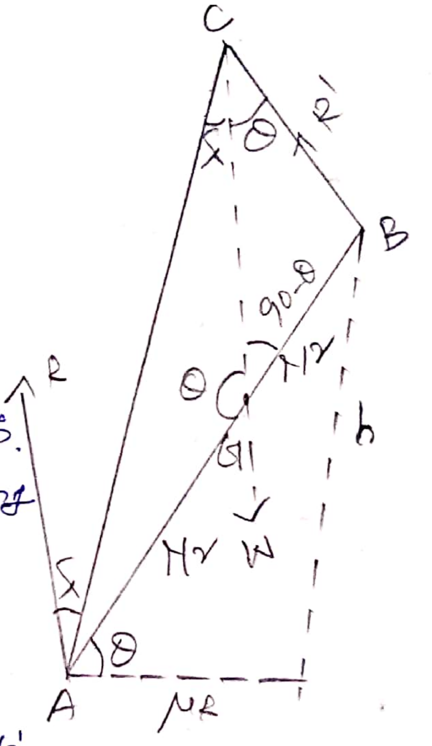
$$P^2Q^2 = W^2(Q^2\sec^2\lambda - P^2)$$

$$\Rightarrow W^2 = \frac{P^2Q^2}{(Q^2\sec^2\lambda - P^2)}$$

$$\therefore W = \frac{PQ}{\sqrt{Q^2\sec^2\lambda - P^2}}$$

(2) l மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு ஏணியின் கீழ்முனை ஒரு சொரசொரப்பான தரையிலும் மற்றொரு முனை தரைக்கு h உயரத்தில் உள்ள ஒரு வழுவழுப்பான கம்பியின் மேல் சாய்ந்து சிறிது வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்கிறது. ஏணி எல்லைச் சமநிலையில் இருக்குமானால் அதன் உராய்வு கெழு

$$\frac{h\sqrt{l^2-h^2}}{l^2+h^2}$$ என நிறுவுக.



__Proof :-__

ஏணி தரையுடன் θ கோணச் சாய்வில் உள்ளது என்க.

A-ல் எதிர்த்தாக்கம் R. உராய்வு விசை μR.

B-ல் எதிர்த்தாக்கம் R'

W என்பது பொருளின் மீது செயல்படும் எடையாகும்.

ΔAGB-ல் திரிகோண அளவுப்பாட்டை பயன்படுத்த

$$(AG+GB)\cot(90-\theta) = AG\cot\alpha - GB\cot\theta$$

$$l\tan\theta = \frac{l}{2}\cot\alpha - \frac{l}{2}\cot\theta$$

$$= \frac{l}{2}(\cot\alpha - \cot\theta)$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \cot\theta)$$

$$\frac{h}{\sqrt{l^2-h^2}} = \frac{\cot\alpha - \cot\theta}{2}$$

$$\frac{h}{\sqrt{l^2-h^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\lambda} - \cot\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2\mu} - \frac{\cot\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\mu} = \frac{h}{\sqrt{l^2-h^2}} + \frac{\cot\theta}{2}$$

$$= \frac{h}{\sqrt{l^2-h^2}} + \frac{\sqrt{l^2-h^2}}{2h}$$

$$= \frac{2h^2 + \sqrt{l^2-h^2}\sqrt{l^2-h^2}}{2h\sqrt{l^2-h^2}}$$

$$= \frac{2h^2 + l^2 - h^2}{2h\sqrt{l^2-h^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\mu} = \frac{h^2+l^2}{2h\sqrt{l^2-h^2}}$$

$$\therefore \mu = \frac{h\sqrt{l^2-h^2}}{l^2+h^2}$$ என நிறுவப்பட்டது.

$$\because \tan\theta = \frac{h}{\sqrt{l^2-h^2}}$$

$$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{h}{\sqrt{l^2-h^2}}}$$

$$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{\sqrt{l^2-h^2}}{h}$$

3. சாய்வுக் கோணம் α உள்ள ஒரு வழுவழுப்பற்ற சாய்தளத்திற்கு இணையாக ஒரு விசை ஒரு பொருளின் செயல்படுகிறது. இது பொருள் மேல்நோக்கி நகர்வதற்கு கீழ்நோக்கி இறங்கும் போதும் உள்ள விசையைப் போல n மடங்கு எனில் $\tan\alpha = \mu\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ என நிறுவுக.

Proof :-

சாய்தளத்தின் வழியே மேல்நோக்கி நகர தேவையான விசை $\dfrac{W}{\cos\lambda}\sin(\alpha+\lambda) \longrightarrow (1)$

சாய்தளத்தின் வழியே கீழ்நோக்கி நகர தேவையான விசை $\dfrac{W}{\cos\lambda}\sin(\alpha-\lambda) \longrightarrow (2)$

கணக்கின்படி $(1) = (2)\, n$ என்பதால்

$$\frac{W}{\cos\lambda}\sin(\alpha+\lambda) = \frac{nW}{\cos\lambda}\sin(\alpha-\lambda)$$

$$\frac{\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda}{\cos\lambda} = \frac{n(\sin\alpha\cos\lambda - \cos\alpha\sin\lambda)}{\cos\lambda}$$

$$\sin\alpha + \cos\alpha\tan\lambda = n(\sin\alpha - \cos\alpha\tan\lambda)$$

$$\sin\alpha + \cos\alpha\,\mu = n(\sin\alpha - \cos\alpha\,\mu)$$

$$\mu\cos\alpha + n\mu\cos\alpha = n\sin\alpha - \sin\alpha$$

$$\mu\cos\alpha(n+1) = \sin\alpha(n-1)$$

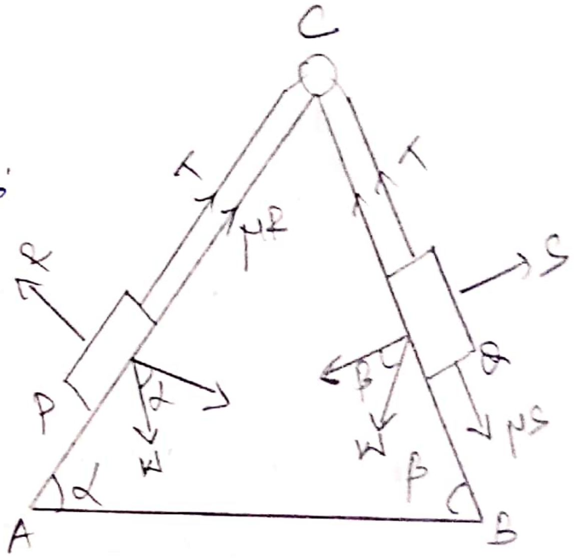
$$\mu\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$\therefore \tan\alpha = \mu\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$ என நிறுவப்பட்டது.

(4) CA, CB என்ற இரு சாய்தளங்கள் உச்சி C-ல் உள்ள கப்பி வழியாக ஒரு கயிறு செலுத்தப்படுகு கயிற்றின் இரு முனைகளிலும் W எடையுள்ள இரு பொருள்கள் P மற்றும் Q இணைக்கப்பட்டுள்ளது. பொருட்கள் நழுவும் நிலையில் சாய்தளங்களின் சாய்வுக்கோணங்களின் வேறுபாடு உராய்வுக் கோணத்தைப் போல் இருமடங்கு என நிறுவுக. (or)

$$\tan\lambda = \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Proof:-



சாய்தளங்கள் CA மற்றும் CB-ன் சாய்வு கோணங்கள் α, β என்க. இத்தளங்களில் W எடையுள்ள பொருட்களை P, Q என்க.

செங்குத்து எதிர்தாக்கங்கள் முறையே R, S என்க. உராய்வுக் கெழு μ என்க. பொருள் P சாய்தளம் CA-ன் கீழ்நோக்கி இறங்கும் அதனால் பொருள் Q சாய்தளம் CB-ன் மேல்நோக்கி நகரும்.

இந்நிலையில் உராய்வு விசைகள் μR, μS ஆகியவை AC, CB வழியாகச் செயல்படும். பொருள் P-ன் சமநிலையில் அதன் மீது செயல்படும் விசைகளை சாய்தளம் CA-க்கு இணையாகவும் செங்குத்தாகவும் பிரிக்க.

$$\mu R + T = W\sin\alpha \rightarrow (1)$$

$$R = W\cos\alpha \rightarrow (2)$$

சமன்பாடு (2) ஐ (1) -ல் பிரதியிட

$$\mu W \cos\alpha + T = W \sin\alpha$$

$$\Rightarrow T = W(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \longrightarrow (3)$$

இதே போல் விசைகளை CB க்கு இணையாகவும் செங்குத்தாகவும் பிரிக்க.

$$T - \mu S = W \sin\beta \longrightarrow (4)$$

$$S = W\cos\beta \longrightarrow (5)$$

சமன்பாடு (5) ஐ (4) -ல் பிரதியிட

$$T - \mu W \cos\beta = W \sin\beta$$

$$\Rightarrow T = W(\sin\beta + \mu\cos\beta) \longrightarrow (6)$$

சமன்பாடு (3), (6) இவற்றின் மூலமாக

$$W(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = W(\sin\beta + \mu\cos\beta)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = \mu(\cos\alpha + \cos\beta)$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$$

$$\mu = \frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\tan\lambda = \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

என நிறுவப்பட்டது.

மேலும், $\lambda = \frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\therefore \alpha - \beta = 2\lambda$$

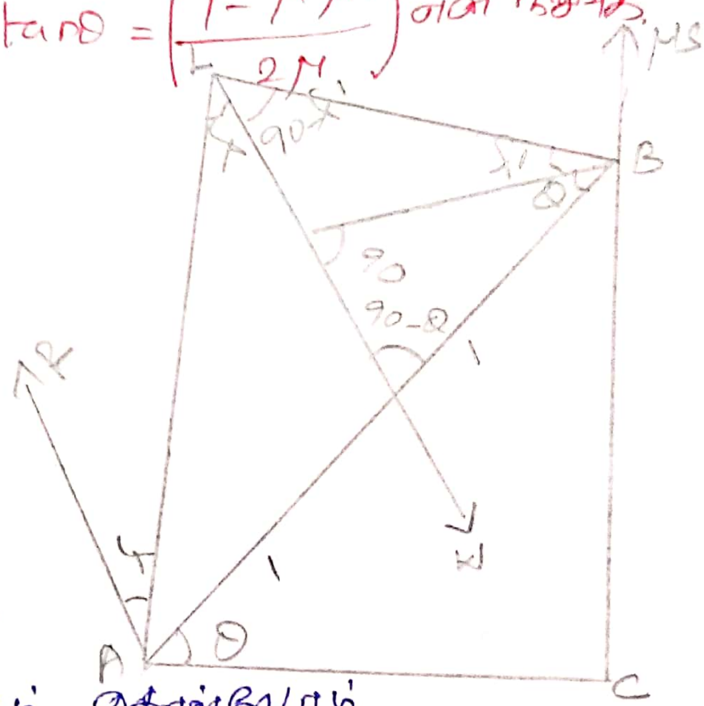
$\because \sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$

$\because \cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

$\mu = \tan\lambda$

ஒரு முனை தரையின் மீதும் மற்றொரு முனை செங்குத்தான சுவற்றின் மீதும் ஒரு சீரான ஏணி சமநிலையில் ஓய்வாக இருக்கிறது. தரை மற்றும் சுவர் இரண்டும் சொரசொரப்பானது. அவற்றின் உராய்வுக் கெழுக்கள் μ, μ' எனில் ஏணி இரு முனைகளிலும் நழுவும் நிலையில் $\tan\theta = \left(\frac{1-\mu\mu'}{2\mu}\right)$ என நிறுவுக.

Proof:-



படத்தில் BC என்பது சுவர் AB என்பது ஏணி A என்ற புள்ளி தரையோடு ஏற்படுத்தும் உராய்வுக் கோணம் λ எனவும் B என்ற புள்ளியின் தரையோடு ஏற்படுத்தும் கோணம் λ' எனவும் கொள்வோம்.

ΔALB-ல் $\underline{\angle LGB} = 90-\theta$

$\mu = \tan\lambda$ மற்றும் $\mu' = \tan\lambda'$ மற்றும் $\underline{\angle BLG} = 90-\lambda'$ என்க.

ΔAGB-ல் திரிகோண ஆய்ப்பாட்டை பயன்படுத்த

$$(AG+GB)\cot(90-\theta) = AG\cot\lambda - GB\cot(90-\lambda')$$

$$(1+1)\cot(90-\theta) = \cot\lambda - \cot(90-\lambda')$$

$$2\tan\theta = \cot\lambda - \tan\lambda'$$

$$\Rightarrow 2\tan\theta = \frac{1}{\tan\lambda} - \tan\lambda'$$

$$= \frac{1 - \tan\lambda \tan\lambda'}{\tan\lambda}$$

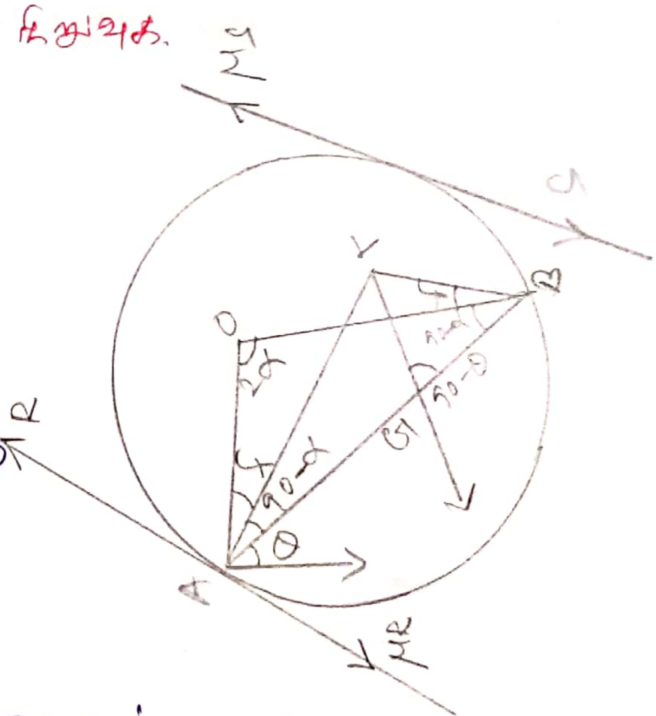
$$2\tan\theta = \frac{1-\mu\mu'}{\mu}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{1-\mu\mu'}{2\mu}$$ என நிறுவப்பட்டது.

ஒரு சீரான கம்பி அழுத்தமான அரைக்கோள கிண்ணத்தினுள் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கம்பி கோள மையத்தை 2α கோணத்தை தாங்குகிறது. மேலும் உராய்வு கோணம் λ எனில் கம்பி கிடைத்தளத்துடன் உருவாக்கும் கோணம்

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sin 2\lambda}{\cos 2\alpha + \cos 2\lambda}\right)$$ என நிறுவுக.

Proof:-



$AB = 2$ என எடுத்துக் கொள்வோம். கம்பியின் கோள மையத்தின் O என்ற புள்ளியின் $\angle AOB = \alpha$,

$\angle OAB = \angle OBA = 90-\alpha$

A-யில் செயல்படும் எதிர்தாக்கம் R எனவும்

B-யில் செயல்படும் எதிர்தாக்கம் S எனவும் கொள்வோம்.

A-யில் செயல்படும் உராய்வு விசை μR எனவும்

B-யில் செயல்படும் உராய்வுக்கு μS எனவும் கொள்வோம்.

G- என்பது புவியீர்ப்பு மையம். θ என்பது கிடைத்தளத்தின்

கம்ம வரைபடத்தில் கோணம் இடுக.

$\angle LGB = 90 - \theta$, $\angle OAL = \angle OBL = \beta$ என்க.

ΔALB-ல்

$$\angle LAB = \angle OAB - \angle OAL$$
$$= 90 - \alpha - \beta$$
$$\Rightarrow \angle LAB = 90 - (\alpha + \beta)$$
$$\angle LBA = \angle OBA + \angle LBO$$
$$= 90 - \alpha + \beta$$
$$\angle LBA = 90 - (\alpha - \beta)$$

இங்கு $AG : GB = 1 : 1$ என்பதால் ΔAGB-ல்

திரிகோண அளவுப்பாட்டை பயன்படுத்த

$$(AG + GB)\cot(90 - \theta) = AG\cot(90 - (\alpha + \beta)) - GB\cot(90 - (\alpha - \beta))$$

$$(1+1)\tan\theta = \tan(\alpha + \beta) - \tan(\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow 2\tan\theta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} - \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$$

$$2\tan\theta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin[\alpha + \beta - (\alpha - \beta)]}{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{\sin(2\beta)}{\cos(\alpha+\beta+\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta-(\alpha-\beta))}$$

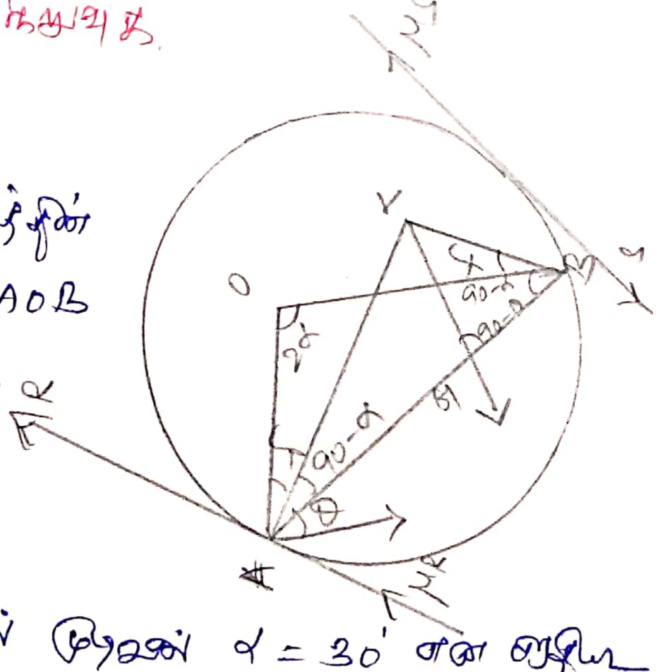
$$\tan\theta = \frac{\sin 2\beta}{\cos(2\alpha+2\beta)}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}\right)$$ என நிறுவப்பட்டது.

21 கிடைமட்ட ஒரு சீரான இரும்புக்கம்பி ஒரு அரைக்கோள கிண்ணத்தினுள் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கம்பியின் நீளமும் கோளத்தின் ஆரமும் சமம். கம்பிக்கும் அரைக்கோள கிண்ணத்திற்கும் இடைப்பட்ட உராய்வுக்கெழு μ எனில் சமநிலையில் கம்பி கிடைத்தளத்துடன் $\tan^{-1}\left(\frac{4\mu}{3-\mu^2}\right)$ என்ற கோணத்தில் இருக்கும் என நிறுவுக.

Proof:-



கம்பியின் நீளமும் கோளத்தின் ஆரமும் சமம் என்பதால் ΔAOB என்பது சமபக்க முக்கோணம் ஆகும். எனவே $90-\alpha = 60^\circ$, $\alpha = 30$

முந்தைய கணக்கில் இருந்து $\alpha = 30^\circ$ என எடுத்து

$$\sin 2\delta = \frac{2\tan\delta}{1+\tan^2\delta}, \quad \cos 2\delta = \frac{1-\tan^2\delta}{1+\tan^2\delta}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sin 2\delta}{\cos 2\alpha + \cos 2\delta}\right)$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\delta / 1+\tan^2\delta}{\cos 60 + \dfrac{1-\tan^2\delta}{1+\tan^2\delta}}$$

$$\tan\theta = \frac{2\mu / 1+\tan^2\delta}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1-\tan^2\delta}{1+\tan^2\delta}}$$

$$= \frac{2\mu / 1+\tan^2\delta}{\dfrac{1+\tan^2\delta + 2(1-\tan^2\delta)}{2(1+\tan^2\delta)}}$$

$$= \frac{2\mu}{1+\tan^2\delta} \times \frac{2(1+\tan^2\delta)}{1+\tan^2\delta+2-2\tan^2\delta}$$

$$= \frac{2\mu \times 2}{3-\tan^2\delta}$$

$$\tan\theta = \frac{4\mu}{3-\mu^2}$$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{4\mu}{3-\mu^2}\right)$ என நிறுவப்பட்டது.

UNIT - 5

பொது சங்கிலியம் - (Common Catenary)

சங்கிலியம் :-

ஒரு சீரான நீட்சியற்ற கயிறு ஒரு கிடைக்கோட்டில் அமையாத இரு நிலையான புள்ளிகளின் பொருத்தப்பட்டு புவியீர்ப்பு விசையின் கீழ் தொங்குமானால் அதன் வடிவம் சங்கிலியம் அல்லது கயிற்று வளைவு என்கிறோம்.

பொது சங்கிலியம் :-

ஒரு சீரான நீட்சியற்ற கயிறு அல்லது சங்கிலி அதன் இரு முனைகளும் ஒரே கிடைக்கோட்டில் அமைந்த இரு நிலையான புள்ளிகளின் பொருத்தப்பட்டு புவியீர்ப்பு விசையின் கீழ் தொங்குமானால் அது பொது சங்கிலியம் எனப்படும்.

சங்கிலியத்தின் அச்சு :-

ஒரு சங்கிலியத்தின் மிக தாழ்ந்த புள்ளி வழிச் செல்லும் நிலைக் குத்துக்கோடு சமச்சீர் உடையதாக இருந்தால் அச்சமச்சீர் கோடு அச்சங்கிலியத்தின் அச்சு எனப்படும்.

சங்கிலியத்தின் உச்சி அல்லது முனை :-

சங்கிலியத்தின் மிக தாழ்ந்த புள்ளி அச்சங்கிலியத்தின் உச்சி அல்லது முனை எனப்படும்.

சங்கிலியத்தின் இயக்குவரை அல்லது உயர்க்கோடு!-

சங்கிலியத்தின் மிக தாழ்ந்த புள்ளிக்கு கீழாக C என்ற தூரத்திலுள்ள கிடைக்கோடு இயக்குவரை அல்லது உயர்க்கோடு எனப்படும்.

சங்கிலியத்தின் அளவு மட்டம் அல்லது வீச்சு :-

சங்கிலியை தொங்கவிடப்படும் இரு நிலையான புள்ளிகளும் ஒரே கிடைக்கோட்டில் இருக்கும் போது அவைகளுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் சங்கிலியத்தின் அளவு மட்டம் அல்லது வீச்சு எனப்படும்.

சங்கிலியத்தின் தொய்வு அளவு :-

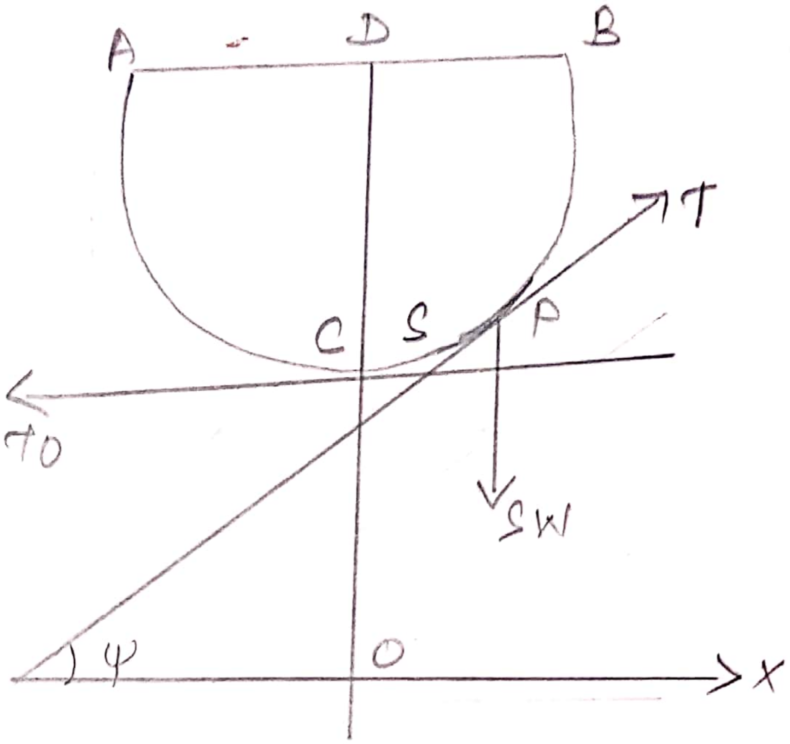
கிடைக்கோட்டில் இரு நிலையான புள்ளிகளில் ஒரு சங்கிலியம் தொங்கவிடப்படும் போது அக்கிடைக் - கோட்டிலிருந்து சங்கிலியத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியின் தூர அளவு அதன் தொய்வு என்கிறோம். இதனை f எனக் குறிக்கிறோம்.

Theorem :-

பொது சங்கிலியத்தின் சமன்பாடு காணுதல் (or) உள்ளிட்ட சமன்பாடு காணுதல் :-

proof :-

ஒரு சீரான மீட்சியற்ற கயிறு அல்லது சங்கிலி ஒரு கிடைமட்டத்தில் AB என்ற புள்ளியில் தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் காரணமாக படத்தில்



உள்ளவாறு தொங்குகிறது. C என்பது சங்கிலியிலுள்ள கீழ் உள்ள புள்ளியாகும். C லிருந்து Co யை செங்குத்தாக வரைக. O-விலிருந்து OX யை கிடைமட்டமாக வரைக. கிடைக்கோட்டை X அச்சு எனவும் செங்குத்து அச்சு Y எனவும் கொள்க. P என்பது கயிற்றிலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. Cக்கும் Pக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் s என்க. W என்பது சங்கிலியின் அலகு நீளத்தின் எடை.

இப்பொழுது சங்கிலியின் CP என்ற புள்ளியின் சமநிலையை கருதுக. இதில் செயல்படும் விசைகள்.

(i) T_0 என்ற இழுவிசை C-ன் தொடுகோட்டின் வழியே கிடைமட்டமாக செயல்படுகிறது.

(ii) P-ன் இழுவிசை T, P-ன் தொடுகோட்டின் வழியே செயல்படுகிறது. இது OX உடன் ψ என்ற கோணத்தை உண்டாக்குகிறது என்க.

(iii) CP-ன் எடை ws என்பது கீழ்நோக்கி புவியீர்ப்பு மையம் G வழியே செங்குத்தாக கீழ்நோக்கி செயல்படுகிறது. சமநிலைக்கு இம்மூன்று விசைகளும் ஒரே புள்ளியில் செயல்படும் விசைகளை கிடைநிலையாகவும் செங்குத்து திசையாகவும் அதன் கூறுகளை பிரிக்க.

$$T\cos\psi + T_0\cos 180^\circ + ws\,270^\circ = 0$$

$$T\cos\psi - T_0 = 0$$

$$T\cos\psi = T_0 \longrightarrow (1)$$

$$T\sin\psi + T_0\sin 180^\circ + ws\sin 270^\circ = 0$$

$$T\sin\psi = ws \longrightarrow (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \tan\psi = \frac{ws}{T_0}$$

இங்கு $T_0 = wc$ என எடுத்து கொள்க.

$$\tan\psi = \frac{ws}{wc}$$

$$\therefore s = c\tan\psi$$

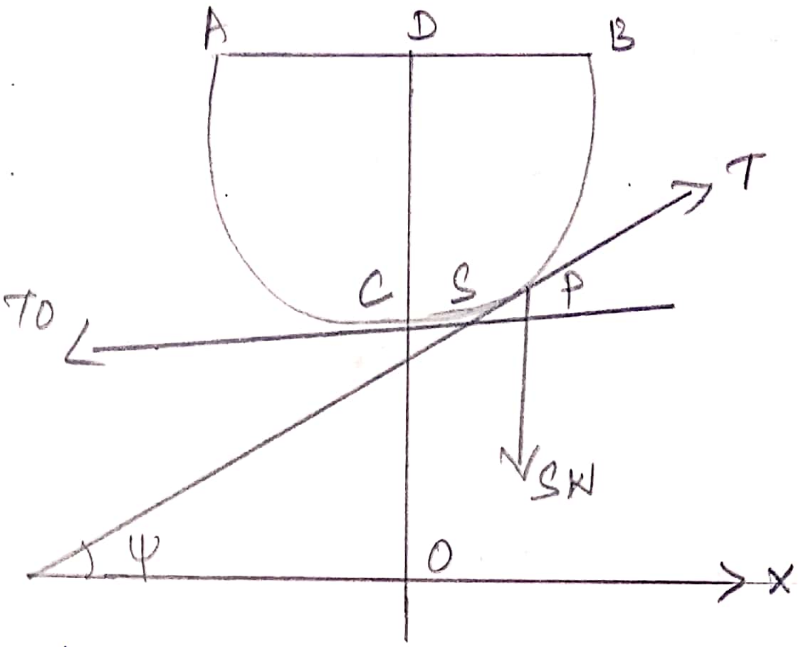
பொது சங்கிலியத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாடு

படத்திலிருந்து,

$$\frac{dy}{ds} = \sin\psi$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\psi$$

Scanned with CamScanner



$$\frac{dy}{dx} = \tan\psi \longrightarrow (1)$$

$$\frac{dy}{d\psi} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{d\psi}$$

$$= \sin\psi \frac{d}{d\psi}(c\tan\psi)$$

$$= \sin\psi \; c \sec^2\psi$$

$$= c \frac{\sin\psi}{\cos\psi} \frac{1}{\cos\psi}$$

$$\frac{dy}{d\psi} = c\tan\psi\sec\psi$$

$$dy = c\tan\psi\sec\psi\, d\psi.$$

$$y = c\int \tan\psi\sec\psi\, d\psi.$$

$$y = c\sec\psi + B \longrightarrow (2)$$

$y = c,\ \psi = 0$ என (2) -ல் இட

$$c = c\sec 0 + B$$

$$c = c + B$$

$$B = 0$$

B-ன் மதிப்பை (2)-ல் பிரதியிட

$$y = c \sec\psi$$

$$y^2 = c^2 \sec^2\psi$$

$$y^2 = c^2(1+\tan^2\psi)$$

$$y^2 = c^2 + c^2\tan^2\psi$$

$$y^2 = c^2 + s^2$$

$$c^2 = y^2 - s^2$$

சமன்பாடு (1) லிருந்து

$$\frac{dy}{dx} = \tan\psi = \frac{s}{c}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2-c^2}}{c}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}} = \int \frac{dx}{c}$$

$$\cosh^{-1}\left(\frac{y}{c}\right) = \frac{x}{c} + B \longrightarrow (3)$$

$y = c$, $x = 0$ என (3)-ல் பிரதியிட

$$\cosh^{-1}(1) = 0 + B$$

$$B = \cosh^{-1}(1)$$

$$B = 0$$

B-ன் மதிப்பை (3)-ல் பிரதியிட

$$\cosh^{-1}\left(\frac{y}{c}\right) = \frac{x}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{c} = \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$\therefore y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

இதுவே காட்டினரியின் சமன்பாடாகும்.

Note:-

$$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = c\sinh\left(\frac{x}{c}\right)\cdot\frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow \tan\psi = \sinh\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$\frac{s}{c} = \sinh\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$s = c\sinh\left(\frac{x}{c}\right)$$

சங்கிலியத்தின் சில முக்கிய சமன்பாடுகள்

P என்பது சங்கிலியத்தின் ஏதேனுமொரு புள்ளி அதன் ஆயத்தொலைவுகள் (x, y) மற்றும் (s, ψ) இவற்றை தொடர்புபடுத்தி 6 சமன்பாடுகளை பெறலாம்.

1. x மற்றும் s யை தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$$s = c\sinh\left(\frac{x}{c}\right)$$

2. x மற்றும் y யை தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

③. y மற்றும் ψ யை தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$$y = c\sec\psi$$

④. s மற்றும் ψ யை தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$$s = c\tan\psi$$

⑤. y மற்றும் s யை தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$$y^2 = c^2 + s^2$$

⑥. x மற்றும் ψ யை தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$y = c\sec\psi$ என்பதிலிருந்து $\rightarrow$ ①

$$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right) \rightarrow ②$$

from ① and ②

$$c\cosh\left(\frac{x}{c}\right) = c\sec\psi$$

$$\cosh\left(\frac{x}{c}\right) = \sec\psi$$

$$\left(\frac{x}{c}\right) = \cosh^{-1}(\sec\psi)$$

$$\frac{x}{c} = \log\left(\sec\psi + \sqrt{\sec^2\psi - 1}\right)$$

$$= \log\left(\sec\psi + \sqrt{1+\tan^2\psi - 1}\right)$$

$$= \log\left(\sec\psi + \sqrt{\tan^2\psi}\right)$$

$$\frac{x}{c} = \log(\sec\psi + \tan\psi)$$

$$\boxed{\therefore x = c\log(\sec\psi + \tan\psi)}$$

Theorem :-

(3). ஒரு சங்கிலியத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் அதன் இழுவிசையைக் காணுதல்.

Proof:

கிடைநிலையில் $T_0 = T\cos\psi \rightarrow (1)$

செங்குத்து நிலையில் $T\sin\psi = ws \rightarrow (2)$

மூன்றாவது சமன்பாடு C என்ற புள்ளியின் அதன் இழுவிசை T_0.

எனவே $T_0 = wc \rightarrow (3)$

சமன்பாடு (1) லிருந்து ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலுள்ள இழுவிசையின் கிடைக்கூறு C என்ற புள்ளியிலுள்ள இழுவிசைக்குச் சமம்.

சமன்பாடு (2) லிருந்து ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலுள்ள இழுவிசையின் செங்குத்துக்கூறு s நீளமுள்ள சங்கிலியின் பகுதியின் எடைக்குச் சமம்.

சமன்பாடு (1) யையும் (2) யையும் வர்க்கப்படுத்திக் கூட்ட,

$$T^2(\cos^2\psi + \sin^2\psi) = T_0^2 + (ws)^2$$

$$T^2 = T_0^2 + w^2s^2$$

சமன்பாடு (3) யை இதில் பயன்படுத்த

$$T^2 = w^2c^2 + w^2s^2$$

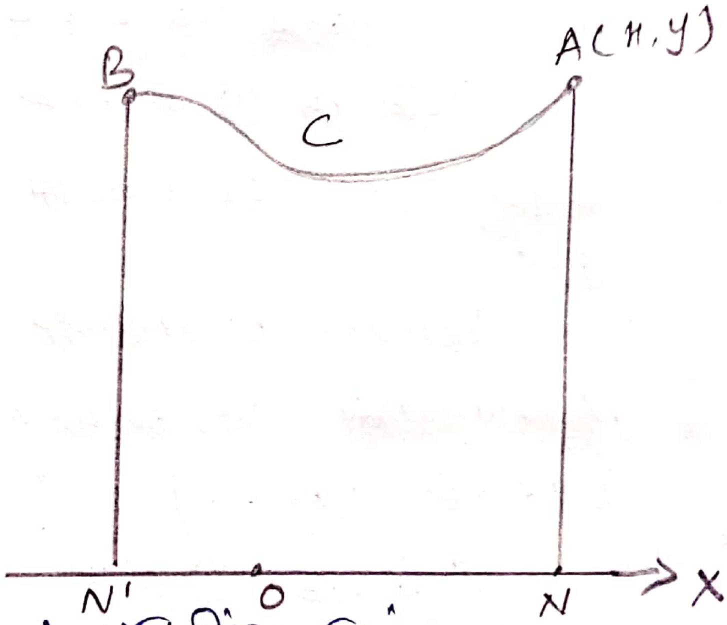
$$T^2 = w^2(c^2+s^2)$$

$$T^2 = w^2y^2 \quad \because y^2 = c^2+s^2$$

$$\boxed{T = wy}$$

இது ஏதேனுமொரு புள்ளி P-ன் செயல்படும் இழுவிசை T ஆனது y நீளமுள்ள சங்கிலியைப் பகுதியின் எடைக்குச் சமம். இங்கு y என்பது x அச்சிலிருந்து புள்ளி P க்கு உள்ள தூரமாகும்.

(4) ஒரு சீரான சங்கிலியானது இரு கம்பங்களின் தொங்கவிடப்பட்டு சமநிலையில் இருக்கும் எனில் அதன் முனைகள் அச்சங்கிலி அமைக்கும் சங்கிலியத்தின் இயக்குவரையில் அமையும்.



Proof:-

NACBN' என்பது கொடுக்கப்பட்டத்தின் அமையும் AB என்ற இரு கம்பங்களில் தொங்கவிடப்படும் சீரான சங்கிலியாகும்.

AN, BN' என்பவை சங்கிலியைப் பகுதிக்கு குத்தாக அமையும். சங்கிலியத்தின் BC என்ற பகுதி ஒரு சங்கிலியத்தை அமைக்கும். கம்பங்கள் வழுவழுப்பாக இருக்கும் அதனால் சங்கிலியின் எல்லா பகுதிகளிலும் சீரான இழுவிசை இருக்கும்.

ACB என்ற சங்கிலியத்திலிருந்து ஏதேனுமொரு புள்ளி இழுவிசை $T = wy \longrightarrow (1)$

AN என்ற பகுதியிலிருந்து A-ன் இழுவிசை

$T = wAN \longrightarrow (2)$

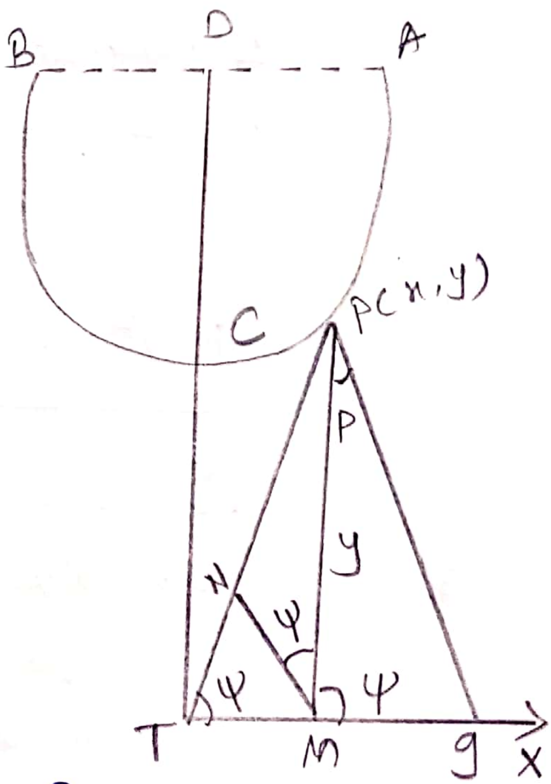
from (1) and (2)

$$Wy = WAN$$

$$\boxed{y = AN}$$

அதாவது N என்ற புள்ளியானது சங்கிலியத்தின் இயக்குவரையின் அமையும். இதே போல் N' என்ற புள்ளியானது சங்கிலியத்தின் இயக்குவரையின் அமையும்.

(5) சங்கிலியத்தின் பண்புகள் :-



P-என்பது சங்கிலியத்தின் மேல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. PT என்பது P-ல் தொடுகோடு. மேலும் $\angle PTX = \psi$. PM என்பது P லிருந்து OX க்கு செங்குத்துக் கோடு.

MN என்பது M லிருந்து PT க்கு செங்குத்துக் கோடு. Pg என்பது OX க்கு செங்குத்துக் கோடு.

ΔPNM-ல்

$$\cos\psi = \frac{MN}{PM}$$

$$MN = PM\cos\psi$$

$$MN = y\cos\psi \qquad \because y = c\sec\psi$$

$$= c\sec\psi\cos\psi$$

$$= c\,\frac{1}{\cos\psi}\cos\psi$$

$$\therefore MN = c$$

இதிலிருந்து T-ன் x அச்சுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடியிலிருந்து P-ன் தொடுகோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் ஒரு மாறிலியாகும்.

ΔPNM-ல்

$$\tan\varphi = \frac{PN}{NM}$$

$$\Rightarrow PN = NM\tan\varphi$$

$$PN = c\tan\varphi$$

ΔPNM-ல்

$$(PM)^2 = (PN)^2 + (NM)^2$$

$$= c^2\tan^2\varphi + c^2$$

$$(PM)^2 = s^2 + c^2 \qquad \because s = c\tan\varphi$$

$$\therefore \boxed{y^2 = s^2 + c^2}$$

(6). ஒரு கிடைக்கோட்டிலுள்ள A, B என்ற புள்ளிகள் ℓ நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலியைத் தாங்குகிறது. அதன் முனையின் இழுவிசை மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியின் இழுவிசையைப் போல் n மடங்கு எனில் அதன் இடைவெளி அல்லது நீளம் $\frac{\ell}{\sqrt{n^2-1}}\log\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)$ என நிறுவுக.

Proof :-

A-யின் ஆயத்தொலைவுகளை (x_A, y_A) என்க.

C-ன் ஆயத்தொலைவுகளை (x_C, y_C) என்க.

w என்பது ஓரலகு நீளமுள்ள சங்கிலியின் எடை

$$y_C = c.$$

A-யில் இழுவிசை $T_A = wy$ எனில்

$$T_A = wy_A$$

C-யில் இழுவிசை T_C எனில்

$$T_C = wy_C = wc$$

மேலும் $T_A = nT_C$ எனக் கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே,

$$wy_A = nwc$$

$$y_A = nc$$

கேட்டினரியின் கார்டீசியன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$y_A = c\cosh\left(\frac{x_A}{c}\right)$$

$$nc = c\cosh\left(\frac{x_A}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x_A}{c} = \cosh^{-1}(n)$$

$$\frac{x_A}{c} = \log\left(n+\sqrt{n^2-1}\right) \longrightarrow (1)$$

மேலும், $y^2 = c^2 + s_A^2$ என்ற தொடர்பிலிருந்து

$$y_A^2 = c^2 + s_A^2$$

$$n^2c^2 = c^2 + s_A^2$$

$$n^2c^2 - c^2 = s_A^2$$

$$c^2(n^2-1) = s_A^2$$

$$c^2 = \frac{s_A^2}{n^2-1}$$

$$C = \frac{SA}{\sqrt{n^2-1}}$$

$$\therefore C = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2-1}}$$

C-ன் மதிப்பை கொண்டு (1)-ல் பிரதியிட

$$HA = \frac{l}{2\sqrt{n^2-1}}\left[\log\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)\right]$$

$$\text{வீச்சு} = 2 \cdot HA$$

$$= 2\,\frac{l}{2\sqrt{n^2-1}}\left[\log\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)\right]$$

$$\therefore \boxed{\text{வீச்சு} = \frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\left[\log\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)\right]}$$

Scanned with CamScanner

$$c = \frac{SA}{\sqrt{n^2-1}}$$

$\because SA = l$

$$\therefore c = \frac{l}{2\sqrt{n^2-1}}$$

C-ன் மதிப்பை சமன்பாடு (1) ல் பிரதியிட

$$x_A = \frac{l}{2\sqrt{n^2-1}}\left[\log\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)\right]$$

$$\text{வீச்சு} = 2 \cdot x_A$$

$$= 2\,\frac{l}{2\sqrt{n^2-1}}\left[\log\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)\right]$$

$$\therefore \boxed{\text{வீச்சு} = \frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\left[\log\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)\right]}$$

(7) ஒரு கிடைக்கோட்டிலுள்ள A, B என்ற புள்ளிகளில் $2l$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலியை தொங்கவிடப்படுகிறது. அதன் முனையின் இழுவிசை மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியின் இழுவிசையைப் போல் n மடங்கு எனில் அதன் கிடைமட்டம் அல்லது வீச்சு $\frac{2l}{\sqrt{n^2-1}}\left[\log\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)\right]$ என நிறுவுக.

Proof:-

A யின் ஆயத்தொலைவுகளை (x_A, y_A) என்க.

C-ன் ஆயத்தொலைவுகளை (x_C, y_C) என்க.

w என்பது ஓரலகு நீளமுள்ள சங்கிலியின் எடை

$$y_C = c$$

A-ன் இழுவிசை T_A எனில் $T_A = w y_A$

C-ன் இழுவிசை T_C எனில்

$$T_C = w y_C = wc$$

மேலும் $T_A = n T_C$ எனக் கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$w y_A = n w c$$

$$y_A = nc$$

சங்கிலியைக் குறிக்கும் கார்டீசியன் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$y_A = c \cosh\left(\frac{x_A}{c}\right)$$

$$\Rightarrow nc = c \cosh\left(\frac{x_A}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x_A}{c} = \cosh^{-1}(n)$$

$$\therefore x_A = c \log\left(n+\sqrt{n^2-1}\right) \longrightarrow (1)$$

மேலும், $y^2 = c^2 + s^2$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

$$y_A^2 = c^2 + s_A^2$$

$$n^2c^2 = c^2 + s_A^2$$

$$n^2c^2 - c^2 = s_A^2$$

$$c^2(n^2-1) = s_A^2$$

$$c^2 = \frac{s_A^2}{n^2-1}$$

$$C = \frac{lA}{\sqrt{n^2-1}}$$

$$\therefore C = \frac{l}{\sqrt{n^2-1}}$$

C-ன் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட

$$x_A = \frac{l}{\sqrt{n^2-1}} \log\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)$$

$$\text{இடைச்சு} = 2 \cdot x_A$$

$$= \frac{2l}{\sqrt{n^2-1}} \log\left(n+\sqrt{n^2-1}\right) \longrightarrow (2)$$

மேலும் (2)-ல் $n=5$ என பிரதியிட

$$\text{இடைச்சு} = \frac{2l}{\sqrt{25-1}} \log\left(5+\sqrt{25-1}\right)$$

$$= \frac{2l}{\sqrt{24}} \log\left(5+\sqrt{24}\right)$$

$$= \frac{2l}{\sqrt{4\times 6}} \log\left(5+\sqrt{24}\right)$$

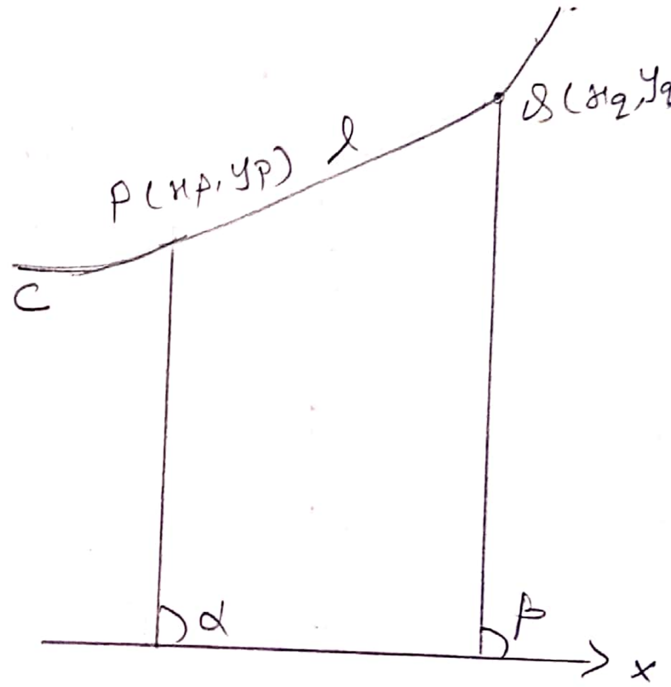
$$= \frac{2l}{2\sqrt{6}} \log\left(5+\sqrt{24}\right)$$

$$\boxed{\therefore \text{இடைச்சு} = \frac{l}{\sqrt{6}} \log\left(5+\sqrt{24}\right)}$$

8\. சாதாரண தொங்கு கம்பியின் ஒரு வில்லின் இரு முனைகளிலுள்ள தொடுகோடுகள் கிடைக்கோட்டுடன் α, β எனும் கோணச்சாய்வில் உள்ளன. வில்லின் நீளம் l எனில் வில்லின் ஒரு முனை மற்றொரு முனைக்கு மேலே

$$\frac{l \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

எனும் உயரத்தில் உள்ளது எனக் காட்டுக.



Proof:-

P, Q என்பது PQ என்ற வில்லின் இரு முனைகள். P-ன் தொடுகோடு x அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் α எனவும் Q-ன் தொடுகோடு x அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் β எனவும் மேலும் PQ $= l$ எனவும் கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$PQ = CQ - CP$$

$$PQ = s_Q - s_P$$

$$l = s_Q - s_P \longrightarrow (A)$$

$$s = c \tan\psi$$

$$s_P = c \tan\psi_P$$

$$\Rightarrow l_P = c \tan\alpha$$

$$l_Q = c \tan\psi_Q$$

$$l_Q = c \tan\beta$$

$$l = c\tan\beta - c\tan\alpha$$

$$l = c(\tan\beta - \tan\alpha)$$

$$c = \frac{l}{(\tan\beta - \tan\alpha)} \longrightarrow (1)$$

$y = c \sec\psi$ என்ற சமன்பாட்டை P-ல் பயன்படுத்த,

$$y_P = c \sec\psi_P$$

$$y_P = c \sec\alpha$$

$$y_Q = c \sec\psi_Q$$

$$\Rightarrow y_Q = c \sec\beta$$

$$y_Q - y_P = c(\sec\beta - \sec\alpha) \longrightarrow (2)$$

சமன்பாடு (1) ஐ (2)-ல் பிரதியிட

$$y_Q - y_P = \frac{l}{(\tan\beta - \tan\alpha)} (\sec\beta - \sec\alpha)$$

$$= \frac{l}{\frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \left(\frac{1}{\cos\beta} - \frac{1}{\cos\alpha} \right)$$

$$= \frac{l(\cos\alpha \cos\beta)}{\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta}\left(\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)$$

$$= \frac{l\,\cos\alpha - \cos\beta}{-(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)}$$

$\because \cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

$$= \frac{-l\,2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{-\sin(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{2l\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$\because \sin 2A = 2\sin A\cos A$

$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$$\therefore \boxed{y_Q - y_P = \frac{l\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}}$$ என நிறுவப்பட்டது.

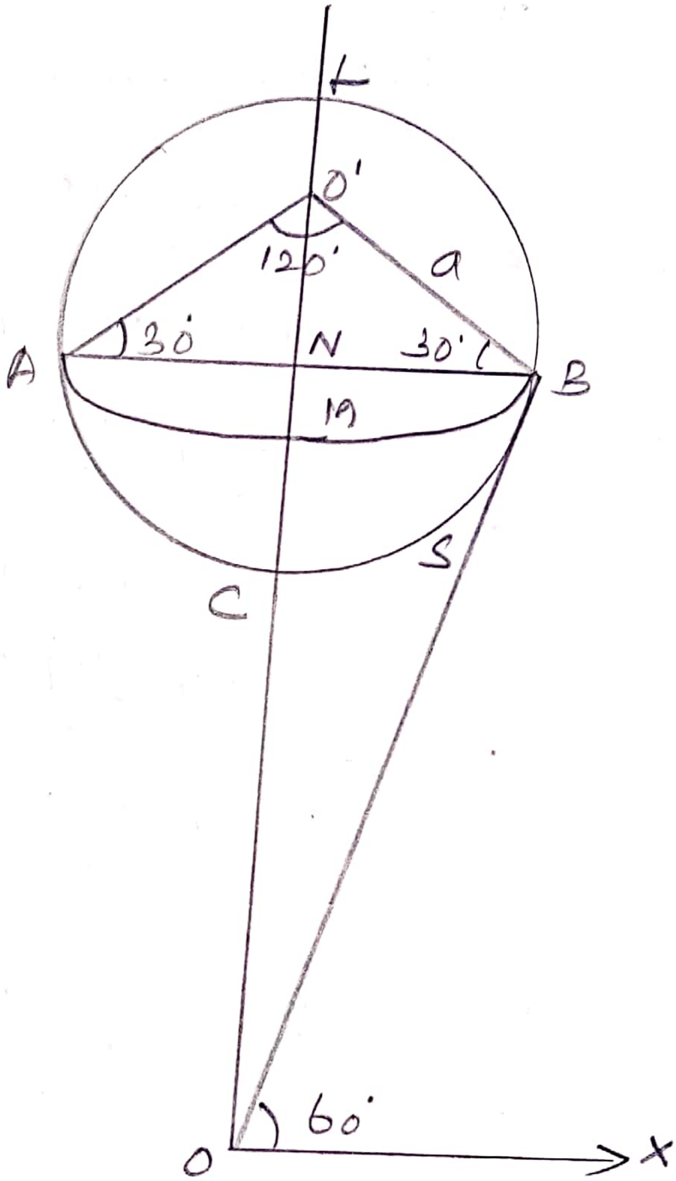
9. a ஆரமுள்ள ஒரு வட்டக்கப்பியின் பரிதியின் $\frac{2}{3}$ பாகத்தை தொட்டவாறு கப்பியின் வழியே தொங்கக்கூடிய கனமான முடிவற்றச் சங்கிலியின் நீளம்

$$a\left[\frac{3}{\log 2+\sqrt{3}} + \frac{4\pi}{3}\right]$$ என நிறுவுக.

Proof :-

a ஆரமுள்ள கப்பியின் மேல் கட்டப்பட்டிருக்கும்

சங்கிலியால் $AO'B = 120°$, $O'AB = 30°$, $O'BA = 30°$



தேவையான முழுமையற்ற

சங்கிலியின் நீளம்

$= ALB$-ன் நீளம் $+$

ACB-ன் நீளம்

சங்கிலியின் மேல் ALB-ன்

நீளம் $= \frac{2}{3} \times$ வட்டத்தின் சுற்றளவு

$$= \frac{2}{3} \times 2\pi a$$

$$= \frac{4\pi a}{3}$$

$\Delta O'BN$-ல்

$$\cos 30 = \frac{BN}{BO'}$$

$$BN = BO' \cos 30$$

$$BN = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

x-ஐயும் ψ-ஐயும் தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$x = c\log(\sec\psi + \tan\psi)$ என்ற வாய்ப்பாட்டிலிருந்து

$$BN = c\log(\sec 60° + \tan 60°)$$

$$= c\log(2+\sqrt{3})$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = c\log 2+\sqrt{3}$$

$$c = \frac{a\sqrt{3}}{2\log(2+\sqrt{3})} \longrightarrow (1)$$

இதன் $CB = s = c\tan\psi$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலமாக

$$s = c\tan 60^{\circ}$$

$$s = c\sqrt{3} \longrightarrow (2)$$

சமன்பாடு (1)-யை (2)-ல் பயன்படுத்த

$$s = \frac{3a}{2\log(2+\sqrt{3})}$$

படத்திலிருந்து $AC = CB$ என்பதால்

$$ACB = 2\,CB$$

$$= 2\,\frac{3a}{2\log(2+\sqrt{3})}$$

$$ACB = \frac{3a}{\log(2+\sqrt{3})}$$

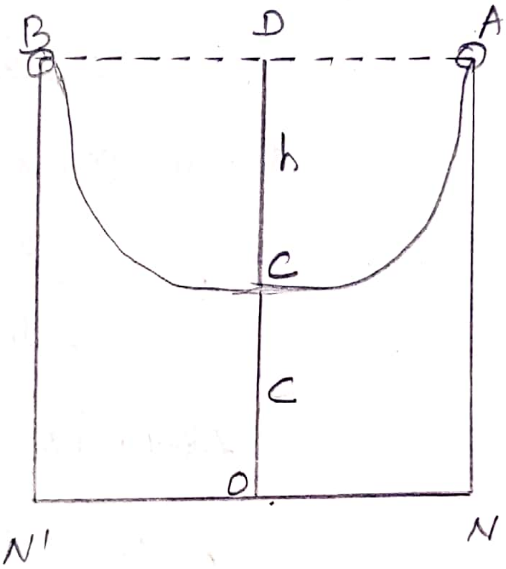
தேவையான சங்கிலியின் நீளம் = ALB-ன் நீளம் + ACB-ன் நீளம்

$$= \frac{4\pi a}{3} + \frac{3a}{\log(2+\sqrt{3})}$$

∴ தேவையான சங்கிலியின் நீளம் $\boxed{= a\left[\frac{3}{\log(2+\sqrt{3})} + \frac{4\pi}{3}\right]}$

2l நீளமுள்ள சீரான சங்கிலியொன்று கிடைமட்டத்தில் அழுவழுப்பான கம்பிகளில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இச்சங்கிலி ஒரு சங்கிலியத்தை அமைக்கிறது. அதன் வளைவு மட்டம் 2a எனவும் தொய்வு h எனவும் இருந்தால் இத்தகை தொங்கக்கூடிய பகுதியின் நீளம் $y = h + l \pm \sqrt{2hl}$ எனக் காட்டுக.

<u>Proof</u> :-



A, B என்ற கம்பிகளில் தொங்கவிடப்படும் சங்கிலியின் முனைகள் அச்சங்கிலி அமைக்கும் சங்கிலியத்தின் இயக்குவரையில் அமையும்.

எனவே படத்திலிருந்து $y_A = OD$

$$= OC + CD$$

$$y_A = c + h$$

$$c = y_A - h \longrightarrow (1)$$

இங்கு $CA + AN = l$

$$s_A + y_A = l$$

$$s_A = -y_A + l$$

$$s_A = l - y_A \longrightarrow (2)$$

s-ஐயும் y-ஐயும் தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$$y^2 = c^2 + s^2$$

$$y_A^2 = c^2 + s_A^2 \longrightarrow (3)$$

சமன்பாடு (1), (2) ஐ (3)-ல் பிரதியிட

$$y_A^2 = (y_A - h)^2 + (l - y_A)^2$$

$$= y_A^2 - 2y_A h + h^2 + l^2 - 2y_A l + y_A^2$$

$$\Rightarrow y_A^2 = 2y_A^2 - 2y_A(h+l) + h^2 + l^2$$

$$y_A^2 - 2y_A(h+l) + h^2 + l^2 = 0$$

$$y_A^2 - 2y_A(h+l) + h^2 + l^2 + 2hl - 2hl = 0$$

$$\Rightarrow y_A^2 - 2y_A(h+l) + (h+l)^2 = 2hl$$

$$[y_A - (h+l)]^2 = 2hl$$

$$y_A - (h+l) = \pm\sqrt{2hl}$$

$$y_A = h+l \pm \sqrt{2hl}$$

$\therefore$ $\boxed{y_A = h+l \pm \sqrt{2hl}}$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

தொங்கலிய மதிப்புகளின் தோராய மதிப்பு காணுதல்.

Proof:-

தொங்கலியத்தின் கார்ட்டீசியன் சமன்பாடு

$$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$= c\left[\frac{e^{x/c} + e^{-x/c}}{2}\right]$$

$$= \frac{c}{2}\left(e^{x/c} + e^{-x/c}\right)$$

$$y = \frac{c}{2}\left[\left(1 + \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{6c^3} + \cdots\right) + \left(1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} - \frac{x^3}{6c^3} + \cdots\right)\right]$$

$$= \frac{c}{2}\left(2 + 2\frac{x^2}{2c^2}\right)$$

$$= \frac{2c}{2}\left(1+\frac{x^2}{2c^2}\right)$$

$$\Rightarrow y = c\left(1+\frac{x^2}{2c^2}\right)$$

$$y = c+\frac{x^2}{2c}$$

$$y-c = \frac{x^2}{2c}$$

$$2c(y-c) = x^2$$

x-ன் மதிப்பு விரிவாக்கத்தில் x^4 கொண்ட உறுப்புகளையும் அதற்கு அப்பால் உள்ள உறுப்புகளையும் தவிர்க்க. $0, c$-யை முனையாகவும் $2c$-யை செவ்வகலமாகவும் கொண்ட ஒரு பரவளையத்தின் சமன்பாடாகும்.

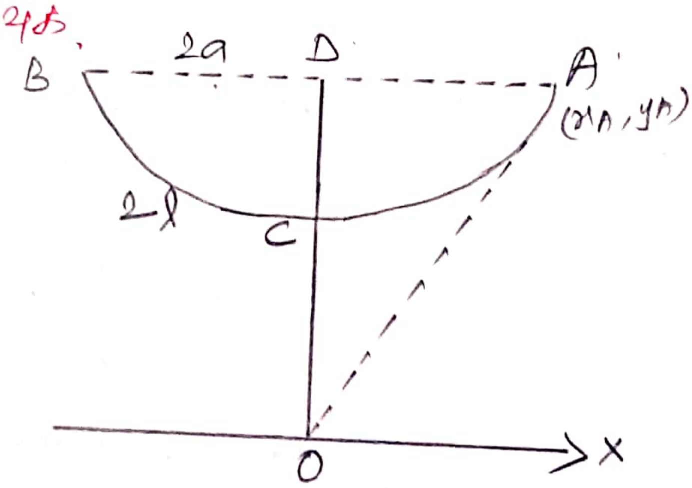
Note :-

① x உடன் ஒப்பிடும் போது c ஆனது மிகப் பெரியதாக இருந்தால் $\frac{x^4}{c^3}$ கொண்ட உறுப்பையும் அதற்கு அப்பால் உள்ள உறுப்புகளையும் நீக்க கிடைக்கும் சமன்பாடு $x^2 = 2c(y-c)$. இதுவே சங்கிலியத்தின் தோராய சமன்பாடாகும்.

② சங்கிலியத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் இழுவிசை $T_0 = wc$. T_0 மிகப்பெரியதாக இருந்தால் c மிகப்பெரியதாக இருக்கும். c மிகப் பெரியதாக இருக்க சங்கிலியை இறுக்கமாக இழுத்துக் கட்ட வேண்டும். இந்நிலையில் சங்கிலியின் அமைப்பு ஒரு பரவளையத்தை குறிக்கும்.

(12) $2l$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலி $2a$ இடைவெளியில் ஒரு கிடைக்கோட்டின் மேலுள்ள இரு புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. a ஐ விட l மிகச்சிறிதளவே அதிகமானால் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் இழுவிசை $\sqrt{\frac{a^3}{6(l-a)}}$ நீள சங்கிலியின் எடைக்குச் சமம் என்றும் கருப்புள்ளியில் அதன் தொய்வு $\frac{1}{2}\sqrt{6a(l-a)}$ எனவும் சங்கிலியின் நீளத்திற்கும் அதன் இடைவெளிக்கும் உள்ள வேறுபாடு

$$\frac{8}{3}\frac{(\text{தொய்வு})^2}{\text{இடைவெளி}}$$ எனவும் நிறுவுக.



Proof :-

(i) கொக்கிகள் 2a இடைவெளியில் இருப்பதால் x_A, y_A மதிப்புகள் a, a.

மேலும் சங்கிலியின் நீளம் $2l$ என்பதால் $s_A = l$ என இருக்கும்.

x-ஐயும் s-ஐயும் தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$$s = c\sinh\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$s_A = c\sinh\left(\frac{x_A}{c}\right)$$

$$l = c\sinh\left(\frac{a}{c}\right)$$

$$= c\left[\frac{e^{a/c} - e^{-a/c}}{2}\right]$$

$$l = \frac{c}{2}\left[\left(1+\frac{a}{c}+\frac{a^2}{2c^2}+\frac{a^3}{6c^3}+\cdots\right)-\left(1-\frac{a}{c}+\frac{a^2}{2c^2}-\frac{a^3}{6c^3}+\cdots\right)\right]$$

$$l = \frac{c}{2}\left(\frac{2a}{c}+\frac{2a^3}{6c^3}\right)$$

$$l = \frac{2c}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{a^3}{6c^3}\right)$$

$$\Rightarrow l = a+\frac{a^3}{6c^2}$$

$$\Rightarrow l-a = \frac{a^3}{6c^2}$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{a^3}{6(l-a)}$$

$$c = \sqrt{\frac{a^3}{6(l-a)}}$$

c என்ற புள்ளியின் இழுவிசை

$$T_0 = wc$$

$$T_0 = w\sqrt{\frac{a^3}{6(l-a)}}$$ என நிறுவப்பட்டது,

Proof (ii) :—

$$y = c\cosh\left(\frac{a}{c}\right)$$

$$y = c\left[\frac{e^{a/c}+e^{-a/c}}{2}\right]$$

$$y = \frac{c}{2}\left[\left(1+\frac{a}{c}+\frac{a^2}{2c^2}+\frac{a^3}{6c^3}+\cdots\right)+\left(1-\frac{a}{c}+\frac{a^2}{2c^2}-\frac{a^3}{6c^3}+\cdots\right)\right]$$

$$y = \frac{c}{2}\left(2+\frac{2a^2}{2c^2}\right)$$

$$= \frac{2c}{2}\left(1+\frac{a^2}{2c^2}\right)$$

$$y = c + \frac{a^2}{2c}$$

$$y - c = \frac{a^2}{2c}$$

$$\sigma = \frac{a^2}{2\sqrt{\dfrac{a^3}{b(l-a)}}}$$

$$= \frac{a^2}{2} \frac{\sqrt{b(l-a)}}{\sqrt{a^3}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4\, b(l-a)}{a^3}}$$

$$\therefore \sigma = \frac{1}{2}\sqrt{ba(l-a)}$$ என நிறுவப்பட்டது.

Proof (iii) :-

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} ba(l-a)$$

$$= \frac{3a}{2}(l-a)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{3a}{4}(2l-2a)$$

$$2l - 2a = \frac{4\sigma^2}{3a}$$

$$= \frac{4\sigma^2}{3a} \times \frac{2}{2}$$

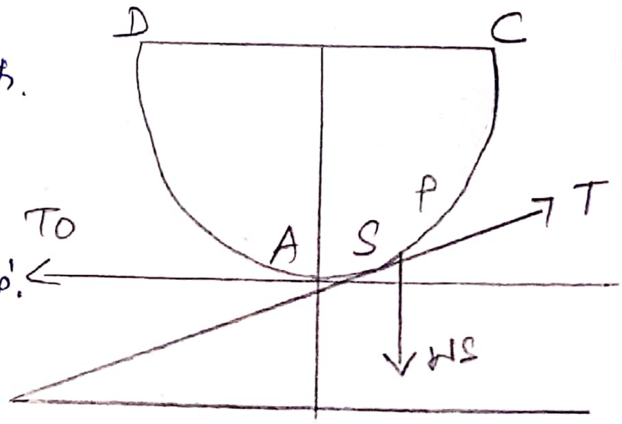
$$= \frac{8\sigma^2}{3(2a)}$$

$$\doteq \frac{8(\text{தொய்வு})^2}{3(\text{நீச்சி})}$$ என நிறுவப்பட்டது.

(13) சங்கிலியத்தின் P என்ற புள்ளியின் இழுவிசை T மேலும் தாழ்ந்த புள்ளி A-யின் இழுவிசை T_0 எனில் $T^2 - T_0^2 = w^2$ என நிறுவுக.

Proof :-

இதன் $AP = s$ என்க.



ψ என்பது P என்ற புள்ளி கிடைநிலையுடன் உருவாக்கும் கோணம். w என்பது பொருளின் மீது செயல்படும் எடை என்க. P என்ற புள்ளியின் அதன் இழுவிசை T அதன் தாழ்ந்த புள்ளியின் இழுவிசை T_0.

இயற்றலிருந்து கிடைநிலையின் அதன் கூறு

$$T\cos\psi = T_0 \longrightarrow (1)$$

செங்குத்து நிலையின் அதன் கூறு

$$T\sin\psi = ws = w \longrightarrow (2)$$

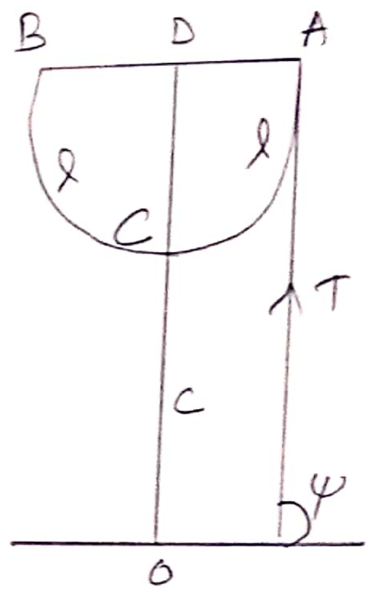
$$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow T^2 = T_0^2 + w^2$$

$\therefore \boxed{T^2 = T_0^2 = w^2}$ என நிறுவப்பட்டது.

(14) $2l$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலியம் இரு நிலையான புள்ளிகளில் தொங்கவிடப்படுகிறது. அதன் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளி C அதன் தொய்வு b எனில் கிடைநிலையின் அதன் இழுவிசையின் கூறு $\frac{w(l^2-b^2)}{2b}$ என நிறுவுக. இங்கு w என்பது கயிற்றின் மீது செயல்படும் எடையாகும்.

Proof :-

$$y = OD$$
$$= OC + CD$$



$y = c + b$

$y_A = c + b \longrightarrow ①$

$CA = l$

$s_A = l \longrightarrow ②$

s-ஐயும் y-ஐயும் தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$$y^2 = c^2 + s^2$$

$$y_A^2 = c^2 + s_A^2 \longrightarrow ③$$

சமன்பாடுகள் ①, ②ஐ ③-ல் பிரதியிட

$$(c+b)^2 = c^2 + l^2$$

$$c^2 + b^2 + 2bc = c^2 + l^2$$

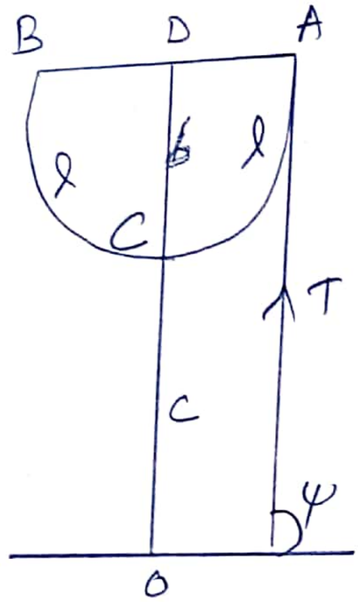
$$2bc = l^2 - b^2$$

$$c = \frac{l^2 - b^2}{2b}$$

கிடைநிலையில் அதன் இழுவிசையின் கூறு

$$T_0 = wc$$

$$\therefore \boxed{T_0 = w\left(\frac{l^2 - b^2}{2b}\right)}$$ என நிறுவப்பட்டது.



$y = c+b$

$y_A = c+b \longrightarrow (1)$

$CA = l$

$s_A = l \longrightarrow (2)$

s-யையும் y-யையும் தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$y^2 = c^2 + s^2$

$y_A^2 = c^2 + s_A^2 \longrightarrow (3)$

சமன்பாடுகள் (1), (2) யை (3)-ல் பிரதியிட

$(c+b)^2 = c^2 + l^2$

$c^2 + b^2 + 2bc = c^2 + l^2$

$2bc = l^2 - b^2$

$c = \dfrac{l^2 - b^2}{2b}$

கிடைநிலையில் அதன் இழுவிசையின் கூறு

$T_0 = wc$

$\therefore \boxed{T_0 = w\left(\dfrac{l^2 - b^2}{2b}\right)}$ என நிறுவப்பட்டது.

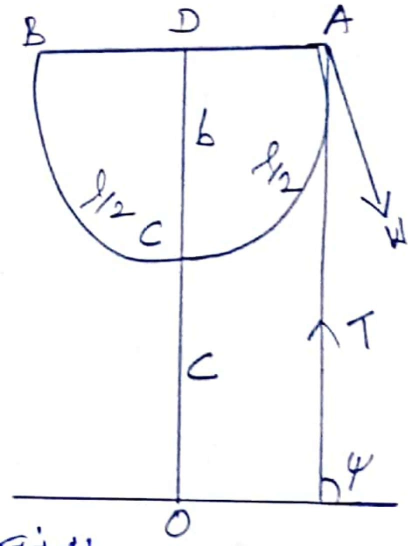
(15) l நீளமுள்ள சங்கிலி ஒன்றுடைய எடையை போல் n மடங்குள்ள இழுவிசையை பெற்றுக் கொண்டு A, B என்ற இருபுள்ளிகளில் தொங்குகிறது எனில் அதன் நடுபுள்ளியின் தொய்வு $l\left(n - \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}\right)$ என நிறுவுக.

Proof :-

B என்ற புள்ளியில் அதன் இழுவிசை

$T = nwl \longrightarrow (1)$ என்றவாறு இருக்கும்.

இதேபோல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் இழுவை



$$T = wy \longrightarrow (2)$$

$$T = wy_A$$

(1) = (2) என்பதால்

$$nwl = wy_A$$

$$nl = y_A$$

மேலும் $s_A = l/2$

$y_A^2 = c^2 + s_A^2$ என்ற வாய்ப்பாட்டிலிருந்து

$$n^2l^2 = c^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$n^2l^2 - \frac{l^2}{4} = c^2$$

$$\Rightarrow c^2 = l^2\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$c = l\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}$$

கீழ்ப்புள்ளியின் ஆழம்

$$CD = OD - OC$$

$$= y - c$$

$$= y_A - c$$

$$= nl - l\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}$$

$CD = l\left(n - \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}\right)$ என நிறுவப்பட்டது.

(16) $x = c\log\left(\frac{y+s}{c}\right)$ என்ற கம்பிவளையத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

Proof:-

y, ψ யை தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$$y = c\sec\psi$$

$$\sec\psi = \frac{y}{c} \longrightarrow (1)$$

s, ψ ஐ தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$$s = c\tan\psi$$

$$\tan\psi = \frac{s}{c} \longrightarrow (2)$$

x, ψ ஐ தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

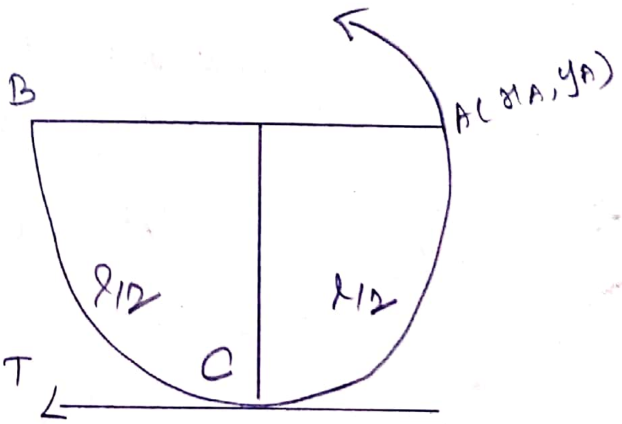
$$x = c\log(\sec\psi + \tan\psi)$$

$$= c\log\left(\frac{y}{c} + \frac{s}{c}\right)$$

$$\therefore x = c\log\left(\frac{y+s}{c}\right)$$

(17) ஒரு கிடைக்கோட்டிலுள்ள A, B என்ற புள்ளிகளில் l நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலியை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அதன் ஒரு முனையின் இழுவிசை மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியிலுள்ள இழுவிசையை போல் மூன்று மடங்கு எனில் அதன் இடைப்பட்ட அகலம் அல்லது தூரம் $\frac{l}{\sqrt{8}}\log(3+\sqrt{8})$ என நிறுவுக.

Proof:-



A-யின் ஆயத்தொலைவுகள் (x_A, y_A) என்க.

C-யின் ஆயத்தொலைவுகள் (x_C, y_C) என்க.

w என்பது ஓரலகு நீளமுள்ள சங்கிலியின் எடை.

$$y_C = c$$

ஏதேனும் ஒரு புள்ளி A-ன் இழுவிசை $T_A = w y_A$

C-ன் இழுவிசை

$$T_C = w y_C$$

$$T = wc$$

மேலும் கணக்கில் $T_A = 3T_C$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$T_A = 3T_C$$

$$w y_A = 3wc$$

$$y_A = 3c$$

சங்கிலியத்தின் கார்டீசியன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$y_A = c \cosh\left(\frac{x_A}{c}\right)$$

$$3c = c \cosh\left(\frac{x_A}{c}\right)$$

$$\cosh^{-1}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\frac{x_A}{c} = \cosh^{-1}(3)$$

$$\frac{x_A}{c} = \log\left(3 + \sqrt{9-1}\right)$$

$$x_A = c \log\left(3 + \sqrt{8}\right) \longrightarrow (2)$$

$s_A = \frac{l}{2}$ எனவும் $y_A = 3c$ எனவும் கொள்வோம்.

y, s யை தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$$y^2 = c^2 + s^2$$

$$y_A^2 = c^2 + s_A^2$$

$$9c^2 = c^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$8c^2 = \frac{l^2}{4}$$

$$c^2 = \frac{l^2}{32}$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{l^2}{4 \times 8}$$

$$\Rightarrow c = \frac{l}{2\sqrt{8}} \longrightarrow (3)$$

சமன்பாடு (3) ஐ (2)-ல் பிரதியிட

$$x_A = \frac{l}{2\sqrt{8}} \log(3+\sqrt{8})$$

ஆனால் வளைவு மட்டம் அல்லது இடைச்சு

$$= 2 \cdot x_A$$

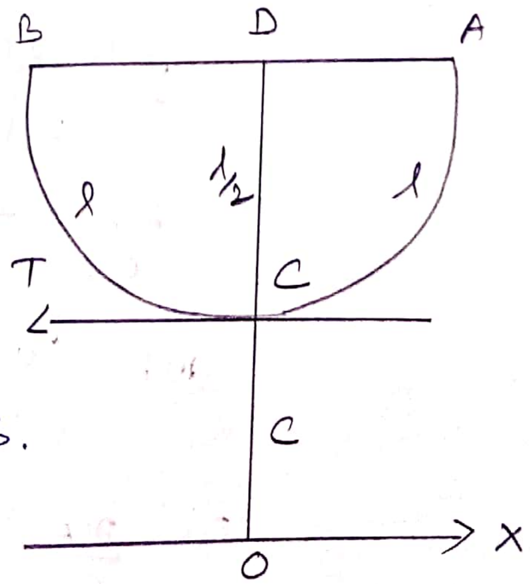
$$= \frac{2l}{2\sqrt{8}} \log(3+\sqrt{8})$$

$$\therefore \boxed{\text{இடைச்சு} = \frac{l}{\sqrt{8}} \log(3+\sqrt{8})}$$

(18) $2l$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலியைப் A, B என்ற புள்ளிகளில் தொங்கவிடப்படுகிறது. நடுப்புள்ளியில் அதன் தொய்வு $\frac{l}{2}$ எனில் அதன் வளைவு மட்டம் அல்லது $\frac{3l}{2} \log 3$ என நிறுவுக.

Proof:-

இங்கு ACB என்பது சங்கிலியாகும். நடுப்புள்ளியில் அதன் தொய்வு $CD = \frac{l}{2}$ ஆகும்.



மேலும், $AC = BC = l$ என்க.

C என்பது சங்கிலியின் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளி. $OC = c$ என்க.

$$y_A = OD$$

$$= OC + CD$$

$$y_A = c + \frac{l}{2}$$

இங்கு $s_A = l$

y-அச்சும் s-அச்சும் தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$$y^2 = c^2 + s^2$$

$$y_A^2 = c^2 + s_A^2$$

$$\left(c + \frac{l}{2}\right)^2 = c^2 + l^2$$

$$c^2 + \frac{l^2}{4} + \frac{2cl}{2} = c^2 + l^2$$

$$cl = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$cl = \frac{3l^2}{4}$$

$$c = \frac{3l}{4}$$

சங்கிலியத்தின் கார்ட்டீசியன் சமன்பாடு.

$$y_A = c\cosh\left(\frac{x_A}{c}\right)$$

$$c + \frac{l}{2} = \frac{3l}{4}\cosh\left(\frac{x_A}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2c+l}{2} = \frac{3l}{4}\cosh\left(\frac{x_A}{c}\right)$$

$$\frac{2(2c+l)}{3l} = \cosh\left(\frac{x_A}{c}\right)$$

$$\frac{x_A}{c} = \cosh^{-1}\left(\frac{4c+2l}{3l}\right)$$

$$\cosh^{-1}\left(\frac{4\left(\frac{3l}{4}\right)+2l}{3l}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x_A}{c} = \cosh^{-1}\left(\frac{5l}{3l}\right)$$

$$= \log\left(\frac{5}{3} + \sqrt{\frac{25}{9} - 1}\right)$$

$$= \log\left(\frac{5}{3} + \sqrt{\frac{16}{9}}\right)$$

$$= \log\left(\frac{5}{3} + \frac{4}{3}\right)$$

$$= \log\left(\frac{9}{3}\right)$$

$$= \log 3$$

$$\Rightarrow xA = c \log 3$$

$$= \frac{3l}{4} \log 3$$

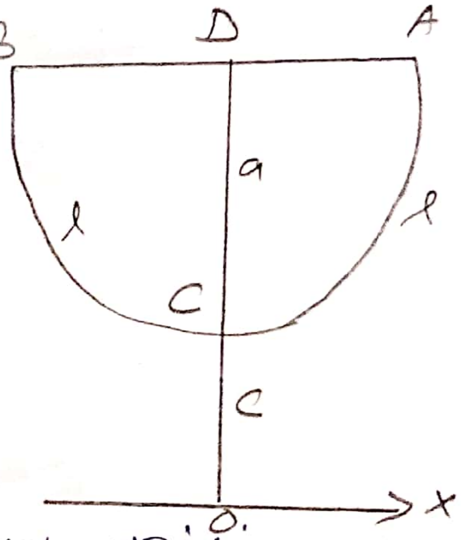
இணைவிட்டம் $= 2 \cdot xA$

$$= 2 \cdot \frac{3l}{4} \log 3$$

$\therefore$ $\boxed{\text{இணைவிட்டம்} = \frac{3l}{2} \log 3}$ என நிறுவப்பட்டது.

19. $2l$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலியை $2a$ இடைவெளியுள்ள A, B என்ற இருபுள்ளிகளில் கிடைமட்டமாக தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அதன் தொய்வு a எனவும் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளி O எனவும் இருந்தால் $\frac{2a^2}{l^2-a^2} = \log\left(\frac{l+a}{l-a}\right)$ எனவும் $\tanh\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{2al}{l^2+a^2}$ எனவும் நிறுவுக.

Proof:-



$2a$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலியை A, B என்ற புள்ளிகளில் தொங்கவிடப்படுகிறது.

மேலும் அதன் தொய்வு $CD = a$

$OC = c$ மேலும்,

$s_A = l$, $x_A = a$, $x_B = a$ என்றவாறு எடுத்துக் கொள்க.

$$y = OD$$

$$= OC + CD$$

$$y = a + c$$

$s_A = l$ என்பதால்

y-யையும் s-யையும் தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$y^2 = c^2 + s^2$ என்பதிலிருந்து

$$(a+c)^2 = l^2 + c^2$$

$$a^2 + c^2 + 2ac = l^2 + c^2$$

$$c = \frac{l^2 - a^2}{2a} \longrightarrow (1)$$

s அளவும் ψ அளவும் தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$$s = c \tan\psi$$

$$s_A = \frac{l^2 - a^2}{2a} \tan\psi$$

$$\tan\psi = \frac{2al}{l^2 - a^2} \longrightarrow (2)$$

$$1 + \tan^2\psi = \sec^2\psi$$

$$\sec^2\psi = 1 + \frac{(2al)^2}{(l^2 - a^2)^2}$$

$$= \frac{(l^2 - a^2)^2 + 4a^2l^2}{(l^2 - a^2)^2}$$

$$= \frac{l^4 + a^4 - 2a^2l^2 + 4a^2l^2}{(l^2 - a^2)^2}$$

$$= \frac{l^4 + a^4 + 2a^2l^2}{(l^2 - a^2)^2}$$

$$\sec^2\psi = \frac{(l^2 + a^2)^2}{(l^2 - a^2)^2}$$

$$\Rightarrow \sec\psi = \frac{l^2 + a^2}{l^2 - a^2} \longrightarrow (3)$$

s - அளவும் x அளவும் தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$$s = c \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \longrightarrow (4)$$

கார்டீசியன் சமன்பாடு

$$y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right) \longrightarrow (5)$$

$$\frac{④}{⑤} \Rightarrow \tanh\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{s}{y}$$

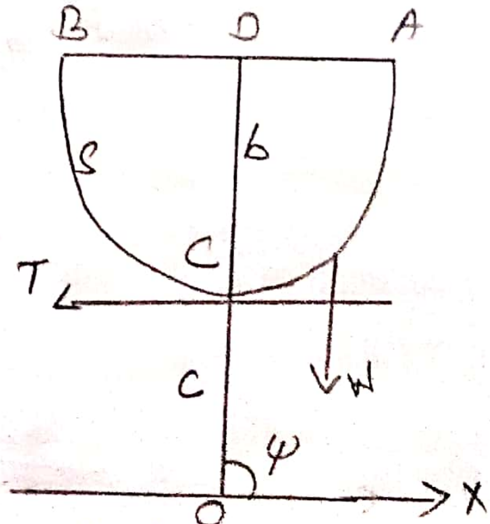
$$= \frac{l}{a+c}$$

$$= \frac{l}{a + \frac{l^2-a^2}{2a}}$$

$$= \frac{2al}{2a^2+l^2-a^2}$$

$$\therefore \boxed{\tanh\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{2al}{l^2+a^2}}$$ என நிறுவப்பட்டது.

20. 2s நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலியை A, B என்ற புள்ளிகளில் கிடைமட்டமாக தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அதன் தொய்வு b எனவும் மற்றும் அதன் தாழ்ந்த புள்ளி C எனவும் இருந்தால் அதன் அகலமளவிடல் அல்லது இடைவெளி $\sqrt{b^2-s^2}\,\log\left(\frac{b+s}{b-s}\right)$ என நிறுவுக.



Proof:-

AB என்பது 2s நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலியைம். இதன் தொய்வு CD = b. C என்பது அதன் தாழ்ந்த புள்ளி.

OC = c. b என்பது தொய்வாக இருக்கும் போது அப்பொருளின் மீது செயல்படும் எடை w என இருப்பின் அதன் இழுவிசை T = wb என்றவாறு இருக்கும்.

கிடைநிலை மற்றும் செங்குத்து திசையின் அச்சின் கூறுகளை எடுக்க.

கிடைநிலை :- $T\cos\psi = T_0 \rightarrow (1)$

செங்குத்துநிலை :- $T\sin\psi = ws \rightarrow (2)$

C என்பது கீழ்தாழ்ந்த புள்ளியாக இருக்கும் போது அதன் கயிற்றின் இழுவிசை

$$T_0 = wc \rightarrow (3)$$

சமன்பாடு (1), (3) லிருந்து

$$T\cos\psi = wc$$

$$wb\cos\psi = wc$$

$$\cos\psi = \frac{wc}{wb}$$

$$\cos\psi = \frac{c}{b} \rightarrow (4)$$

சமன்பாடு (2) லிருந்து,

$$T\sin\psi = ws$$

$$wb\sin\psi = ws$$

$$\sin\psi = \frac{s}{b} \rightarrow (5)$$

$$\frac{(5)}{(4)} \Rightarrow \tan\psi = \frac{s}{c}$$

y - ஐயும் ψ ஐயும் தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடு

$y = c\sec\psi$ என்றிருந்து

$$y = c\frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow b = y$$

y மதிப்பு s மதிப்பு தொடர்பில் பிரதியிட

$$y^2 = c^2 + s^2$$

$$b^2 = c^2 + s^2$$

$$c^2 = b^2 - s^2$$

$$c = \sqrt{b^2 - s^2}$$

x மதிப்பு ψ மதிப்பு தொடர்பில் பிரதியிட

$$x_A = c \log(\sec\psi + \tan\psi)$$

$$x_A = \sqrt{b^2 - s^2} \log\left(\frac{b}{c} + \frac{s}{c}\right)$$

$$x_A = \sqrt{b^2 - s^2} \log \frac{b+s}{\sqrt{b^2 - s^2}}$$

$$= \sqrt{b^2 - s^2} \log\left[\frac{\sqrt{b+s}\sqrt{b+s}}{\sqrt{b+s}\sqrt{b-s}}\right]$$

$$= \sqrt{b^2 - s^2} \log\sqrt{\frac{b+s}{b-s}}$$

$$x_A = \sqrt{b^2 - s^2} \log\left(\frac{b+s}{b-s}\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{b^2 - s^2}\, \frac{1}{2} \log\left(\frac{b+s}{b-s}\right)$$

$$x_A = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - s^2} \log\left(\frac{b+s}{b-s}\right)$$

இணைய இரட்டம் $= 2 . \pi A$

$\therefore$ வளைய இரட்டம் $\boxed{= \sqrt{b^2 - c^2} \log\left(\frac{b+c}{b-c}\right)}$ என நிறுவப்பட்டது.

பரவளையத்தின் சங்கிலி

இரு நிலையான புள்ளிகளுக்கிடையே தொங்கும் ஒரு லேசான இழையின் மீது பரிப்பீடு செய்யப்பட்ட சம எடையுடைய துகள்கள் அமைந்துள் ஒவ்வொரு ஜோடியும் அடுத்தடுத்த துகள்களுக்கிடையேயுள்ள கிடைத்தூரம் ஒரே சமமாக இருக்கும் வண்ணம் இணைக்கப்பட்டால் அத்துகள்கள் நிலை அச்சுக்கு நிலைக்குத்தாக ஒரு பரவளையத்தின் மேல் அமையும்.

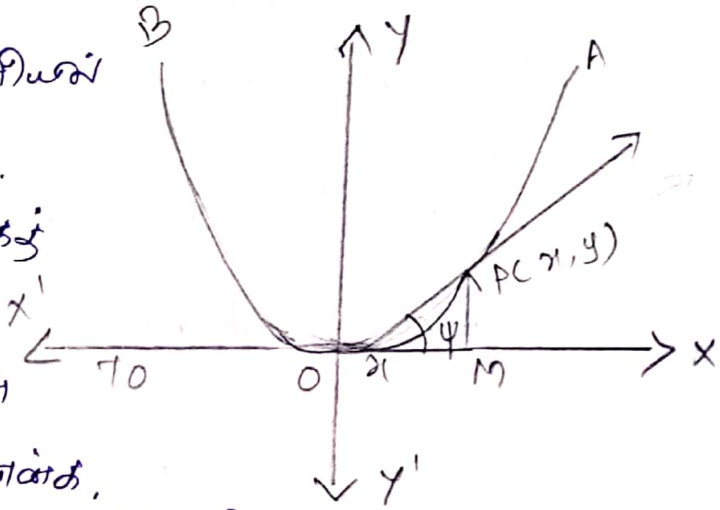
தொங்கும் பாலங்கள் (Suspension bridge)

துகள்களுக்கிடையேயுள்ள தூரங்கள் அதன் எல்லையில் குறைக்கப்பட்டால் தொடர்ச்சியான நெருக்கமாக உள்ள பாகத்தை அதன் கிடைப்பரிப்பீடு சீராக இருக்கும் வண்ணம் தாங்கும். ஒரு லேசான சங்கிலியை தொங்கும் பாலம் என்கிறோம்.

① தொங்கும் பாலத்தின் சமன்பாடு காண்க (or)

ஒரு சங்கிலி அதன் ஒவ்வொரு பகுதியின் எடை அதன் கிடைமட்டப் பகுதிக்கு ஏற்றதாக சமமாக இருக்கும் அல்லது பாலம் கொண்டு புவியீர்ப்பு விசை காரணமாக தொங்கும் பொழுது அது ஒரு பரவளைய வடிவத்தை மேற்கொள்ளும் என நிறுவுக.

நிறுவல்:-



A, B என்ற புள்ளிகளில் சங்கிலி தொங்கவிடப்படும். O என்பது சங்கிலியின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி.

சங்கிலியின் கிடைமட்ட ஓரலகு நீளத்தின் எடை w என்க.

OM என்பது OP-யின் கிடைமட்டமான தொங்கும் பாலத்தின் எடை w.OM. இந்த எடை நிலைக்குத்தாக OM ன் மையப்புள்ளி வழியாக மேல் கீழாக செயல்படும். O, P என்ற புள்ளிகளில் உள்ள தொடுகோடுகள் வழி செயல்படும் இழுவிசைகள் OP யை தாங்கும். மேலும் இழுவிசைகள் O, P-யில் உள்ள இழுவிசைகள் முறையே T, T_0 எனக் கொள்வோம்.

T-யின் தொடுகோடு கிடைக் கோட்டுடன் உண்டாக்கும் கோணம் ψ எனில் விசைகளை கிடை மற்றும் செங்குத்து திசைகளில் பிரிக்க.

$$T\cos\psi = T_0 \longrightarrow ①$$

$$T\sin\psi = w \cdot OM \longrightarrow ②$$

O வழியாக செல்லும் கிடைக்கோட்டை x அச்சாகவும் அதன் வழியே வரையப்படும் நிலைக்குத்துக் கோட்டை y அச்சாகவும் கொள்க.

P என்ற புள்ளியின் அதன் ஆயத்தொலைவுகள் முறையே (x, y) என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$T \sin\psi = w.x \longrightarrow (3)$$

C என்ற மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியின் அதன் இழுவிசை $T_0 = wc$ என்றவாறு இருக்கும்.

$$\frac{(3)}{(1)} \Rightarrow \tan\psi = \frac{w.x}{T_0}$$

$$\tan\psi = \frac{w.x}{wc}$$

$$\tan\psi = \frac{x}{c}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{c}$$

$$\Rightarrow c\,dy = x\,dx$$

$$cy = \frac{x^2}{2} + k$$

$x=0, y=0$ எனில் $k=0$

$$x^2 = 2cy.$$

இது ஒரு பரவளையத்தின் சமன்பாடாகும்.

சமன்பாடு (1), (3) ஐ வர்க்கப்படுத்திக் கூட்ட

$$T^2 = T_0^2 + w^2x^2$$

$$= w^2c^2 + w^2x^2$$

$$T^2 = w^2(c^2+x^2)$$

$$\therefore \boxed{T = \sqrt{w^2(c^2+x^2)}}$$

இதுவே தொங்கும் பாலத்தின் இழுவிசையாகும்.

தொங்கும் பாலங்களின் கொள்கைகள்

தொங்கும் பாலம் என்பது இரண்டு சமமான எடை கொண்ட சங்கிலியின் தொங்குகின்றன. அவற்றின் முனைகள் நிலையாக தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும். அவ்வாறாக மறுமுனையில் தொங்கவிடப் பட்டிருக்கும். சங்கிலிகளில் கனம் கொண்ட உருளைகளில் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும் அமைவே தொங்கும் பாலங்களின் உருளைகளின் பகுதியானது சமமான இடைமட்டத்தில் சமமாக எடையுடன் தொங்கும். இந்த சங்கிலியின் முனைப் பகுதியில் தொங்கக்கூடிய கன உருளையின் எடையானது சங்கிலியின் எடையைக் காட்டிலும் சிறியது.

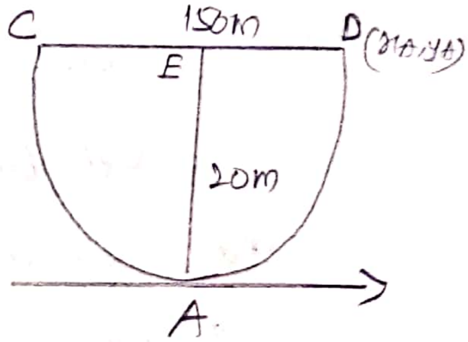
எனவே அது நீக்கப்படுகிறது. இவ்வாறாக நீக்கப்பட்ட சமமான எடை கொண்ட சங்கிலிகள் தொங்குவதைக் கூடிய பாலமானது தொங்கும் பாலமாகும்.

1) ஒரு தொங்கும் பாலத்தின் மொத்த பாரமாகிய 200 கிலோகிராம்-கள் அதன் 150 அடி மீட்டர் நீளங்களுக்கு இடையேயான அனைவரை மட்டத்தின் சமச்சீராக பிரிப்பீடு செய்யப்பட்டுள்ளது. அதன் உயரம் 20 மீ எனில் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியையும்

அது தாங்கக்கூடிய புள்ளிகளிலும் இழுவிசையைக் காண்க.

Solution:-

இங்கு CD என்பது
150 m நீளமுள்ள ஒரு சங்கிலி,
இதன் உயரம் $AE = y_A = 20m$.
சங்கிலியின் பரவளைய சமன்பாடு



$$x^2 = 2cy \rightarrow (1)$$

$$x_A^2 = 2c y_A$$

$$(75)^2 = 2c(20)$$

$$5625 = 40c$$

$$c = \frac{5625}{40}$$

$$\Rightarrow c = 140.6 \text{ (or)}$$

$c = 141$ தோராயமாக.

w என்பது 200 குவிண்டல்கள் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$w = \frac{200}{100}$$

∵ 100 கிலோ என்பது 1 குவிண்டல்

$$w = 2kg$$

மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியின் இழுவிசை $T_0 = wc$

$$T_0 = 2(141)$$

$$T_0 = 282$$

இதன் மேல்வரும் இழுவிசை C மற்றும் D என்ற

புள்ளிகளில் இருக்கும். D என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் இழுவிசை

$$T = \sqrt{w^2(c^2+x^2)}$$

$$T^2 = w^2(c^2+x^2)$$

$$T^2 = 2^2(141^2+75^2)$$

$$= 4(19881+5625)$$

$$= 4(25506)$$

$$T^2 = 102024$$

$$\therefore \boxed{T = 319.41}$$

(2) ஒரு தொங்கு பாலத்தின் ஒரு பாரமாகிய 750 கிலோகிராம்கள் அதன் 100 m கிடைமட்டத்திலுள்ள இடைவெளியை உடைய இடத்தில் சமச்சீராக பரப்பி செய்யப்பட்டுள்ளது. அதன் உயரம் 10 m எனில் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியையும் அது தாங்கக்கூடிய புள்ளியையும் இழுவிசையை காண்க.

தீர்வு :-

இங்கு CD என்பது 100 m நீளமுள்ள ஒரு சங்கிலி.

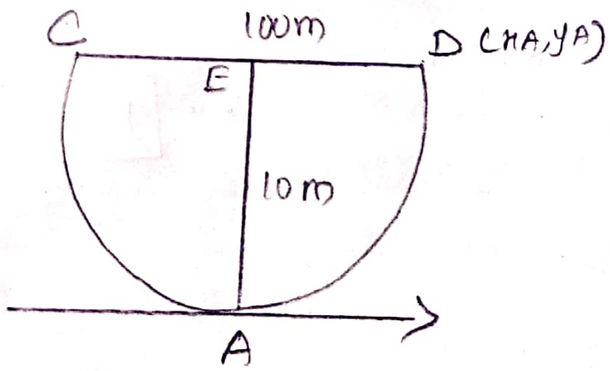
இதன் உயரம் $AE = y_A = 10m$.

சங்கிலியின் பரவளைய சமன்பாடு

$$x^2 = 2cy$$

$$x_A^2 = 2cy_A$$

$$(50)^2 = 2c(10)$$



$$2500 = 20c$$

$$\Rightarrow c = \frac{2500}{20}$$

$$c = 125$$

W என்பது 750 நியூட்டன்கள் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$W = \frac{750}{100}$$

$$W = 7.5 \text{ kg}$$

மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியின் இழுவிசை $T_0 = Wc$

$$T_0 = (7.5)\,125$$

$$T_0 = 937.5$$

இதன் பெரும இழுவிசை C மற்றும் D என்ற புள்ளிகளில் இருக்கும். D என்ற தொங்குமுனை புள்ளியின் இழுவிசை

$$T^2 = W^2(c^2 + x^2)$$

$$T^2 = (7.5)^2(125^2 + 50^2)$$

$$= 56.25\,(15625 + 2500)$$

$$= 56.25\,(18125)$$

$$\therefore \boxed{T = 1009.7184}$$ நியூட்டன்கள்